



המחלקה למתמטיקה

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית ג'

תאריך הבחינה: 27.6.06
שם המורים: פרופ' אמנון יקותיאל, פרופ' אמנון בסר
מס' קורס 201-1-9281
שנה: תשס"ו 2005/6 סמסטר: ב' מועד: א'
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט [השאלון לפרסום]

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

סימונים: האותיות \mathbb{R}, \mathbb{Q} ו- \mathbb{C} מייצגות את השדות של המספרים הרציונליים, הממשיים והמרוכבים בהתאמה. הביטוי $M_{m \times n}(F)$ מסמן את מרחב המטריצות בגודל $m \times n$ מעל השדה F , ו- F^n הינו מרחב העמודות בגובה n . האותיות O ו- I מסמנות את מטריצות (או את טרנספורמציות) האפס והיחידה בהתאמה. עבור טרנספורמציה ליניארית $T: V \rightarrow W$ הביטויים $\text{Im}(T)$ ו- $\text{Ker}(T)$ מסמנים את התמונה והגרעין בהתאמה. הביטוי \vec{e}_i מסמן את הוקטור ב- F^n שהרכיב ה- i שלו 1 ויתר הרכיבים הם 0. עבור פולינום $f(x)$ מעל \mathbb{R} הביטויים $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ וכו' מסמנים את הנגזרות של f .

1. נתונה מערכת משוואות

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + \lambda x_3 &= -4 \\2x_1 + \lambda x_2 + 8x_3 &= 0 \\3x_1 + \lambda x_2 + 13x_3 &= 2\end{aligned}$$

בשלושה משתנים מעל השדה \mathbb{R} , התלויה בפרמטר λ . עבור כל ערך של λ מצא האם למערכת אין פתרון; יש פתרון יחיד; או שיש אינסוף פתרונות.

2. נתונים הוקטורים

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, w_1 := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, w_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, w_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

במרחב הוקטורי \mathbb{R}^4 מעל השדה \mathbb{R} . שים לב שהוקטור האחרון תלוי בפרמטר λ . נגדיר תת מרחבים $V := \text{Sp}(v_1, v_2, v_3)$ ו- $W := \text{Sp}(w_1, w_2, w_3)$. האם קיים λ כך ש- $\dim(V \cap W) = 1$? אם כן מצא כזה λ ; אם לא נמק. (רמז: להשתמש במשפט המימד).

3. בשאלה זו השדה הוא \mathbb{R} ו-

$V := \{ f(x) \text{ ממעלה } \geq 3 \text{ עם מקדמים ב- } \mathbb{R} \}$

נגדיר פונקציה $T : V \rightarrow V$ ע"י הנוסחה

$$T(f) := 2 \frac{df}{dx} + 3x \frac{d^2f}{dx^2}$$

- הוכח כי T אופרטור ליניארי.
- מצא את המטריצה $[T]_{\mathcal{V}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס הסדור $\mathcal{V} := (1, x, x^2, x^3)$.
- מצא בסיסים של המרחבים $\text{Im}(T)$ ו- $\text{Ker}(T)$ וחשב את המימדים שלהם.
- האם T אופרטור הפיך? הסבר.

4. נתונה המטריצה

$$A := \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

מעל השדה \mathbb{Q} .

- מצא את את הערכים העצמיים של A .
- לכל ערך עצמי מצא את הוקטורים העצמיים השייכים לו.
- האם A ניתנת לליכסון (מעל \mathbb{Q})? אם כן לכסן אותה; אם לא נמק.
- חשב את $\det(A^{200})$.

5. נתונה המטריצה

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -\frac{3}{2} \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

מעל השדה \mathbb{R} .

- מצא את הפולינום האופייני $p_A(x)$.
- לכסן את A ; כלומר מצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D עם רכיבים ב- \mathbb{R} כך ש-
 $D = P^{-1}AP$.
- חשב את המטריצה $(A + I)^{-100} \cdot A^{50}$.

בהצלחה!