BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

המחלקה למתמטיקה

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית ג'

תאריך הבחינה: 19.7.06
שם המורים: פרופ' אמנון יקותיאלי, פרופ' אמנון בסר
מס' קורס 201-1-9281
שנה: תשס"ו 2005/6 סמסטר: ב' מועד: ב'
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט [השאלון לפרסום]

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

סימונים: האותיות $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ו־ $\mathbb{C}$ מייצגות את השדות של המספרים הרציונליים, הממשיים והמרוכבים בהתאמה. הביטוי $\mathrm{M}_{m\times n}(F)$ מסמן את מרחב המטריצות בגודל $m \times n$ מעל השדה F, ו־ F^n הינו מרחב העמודות בגובה n. האותיות O ו־ I מסמנות את מטריצות (או את טרנספורמציות) האפס והיחידה בהתאמה. עבור טרנספורמציה ליניארית $T : V \to W$ הביטויים $\mathrm{Im}(T)$ ו־ $\mathrm{Ker}(T)$ מסמנים את התמונה והגרעין בהתאמה. הביטוי $\vec{e}_i$ מסמן את הוקטור ב־ F^n שהרכיב ה־ i שלו 1 ויתר הרכיבים הם 0. עבור פולינום $f(x)$ מעל $\mathbb{R}$ הביטויים $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ וכו' מסמנים את הנגזרות של f.

1. נתונה המטריצה
$$A := \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & -7 \end{bmatrix}$$
מעל השדה $\mathbb{Q}$. מצא מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש־ $P^{-1}AP = D$.

2. יהי V מרחב וקטורי ממימד 3 מעל השדה $\mathbb{R}$, ויהי $T : V \to V$ אופרטור ליניארי. נתון כי $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ בסיס סדור של V המלכסן את T. יהיו $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ הערכים העצמיים המתאימים, כלומר $T(v_i) = \lambda_i v_i$. כמו כן נתון הפולינום $f(x) = 18x^3 + 2x - 1$, ומגדירים אופרטור $S := f(T)$.

   א. הוכח כי האופרטור S ניתן לליכסון. מצא וקטורים עצמיים וערכים עצמיים של S.
   ב. נתון כי $f(\lambda_i) \neq 0$ לכל i. הוכח כי האופרטור S הפיך.

3. נתונה המטריצה

$$A := \begin{bmatrix} 11 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

מעל השדה $\mathbb{R}$.

א. הצג את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.
ב. חשב את A^{-1}.
ג. פתור את המשוואה

$$AXA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

(כאן X הוא משתנה המקבל ערכים ב־ $\mathrm{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.)

4. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{Q}$,

$V := \{$ פולינומים $f(x)$ ממעלה ≤ 2 עם מקדמים ב־ $\mathbb{Q}$ $\}$.

ו־ $W := \mathbb{Q}^3$. נגדיר פונקציה $T : V \to W$ ע״י הנוסחה

$$T(f) := \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix} .$$

כמו כן נגדיר פונקציה $S : V \to V$ ע״י הנוסחה $S(f(x)) := f(2x)$.

א. הוכח כי T ו־ S טרנספורמציות ליניאריות.
ב. הראה כי הסדרה $\mathbf{v} := (x^2 - x,\ x^2 - 2x,\ x^2 - 3x + 2)$ היא בסיס סדור של V.
ג. מצא את המטריצה $[T]^{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}$ המייצגת את T ביחס לבסיסים הסדורים $\mathbf{v}$ ו־ $\mathbf{e} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
ד. מצא בסיס של הגרעין של הטרנספורמציה $T(S^2 - 16I)$.

5. נתונים תת המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^4$:

$$V := \mathrm{Sp}(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}) \qquad W := \mathrm{Sp}(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix})$$

א. מצא בסיס של $V \cap W$.
ב. השלם את הבסיס שמצאת בסעיף א׳ לבסיס של $\mathbb{R}^4$.

בהצלחה!