כדי להשלים צריך דיוק ד הוכי

$$d_Q^{-1}\circ\left(\psi^{-1}-\varphi^{-1}-h^0\circ d_B^{-1}\right): B^{-1}\to Q^0$$

$$\| $$

$$d\circ(\psi^{-1}-\varphi^{-1})-d\circ \overbrace{h^0}^{}\circ d = 0$$

$$(\psi^0-\varphi^0)$$

ולכן ρ

$$\begin{array}{ccc} & & B^{-1} \\ & \overset{h^{-1}}{\swarrow} & \downarrow{\scriptstyle \psi^{-1}-\varphi^{-1}-h^0\circ d^{-1}} \\ Q^{-2} & \xrightarrow{d^{-2}} & \operatorname{Ker}(d_B^{-1}) \end{array}$$

קיים

$$d^{-2}\circ h^{-1}+h^0\circ d^{-1}=\psi^{-1}-\varphi^{-1}$$

ולכן הטענה.

(ג) ~~ההיפוך~~ $\rho: Q\to P$ הוא על ההומוטופיה

כך ש- $\eta\circ\rho=\zeta$ (כמו קודם לפי זה)

אזי $\rho\circ\varphi: P\to P$ ~~מקיים~~ מקיים

$\eta\circ(\rho\circ\varphi)=\eta$ ולכן (ב) $\rho\circ\varphi\sim 1_P$

באותו אופן $\varphi\circ\rho\sim 1_Q$

□

הפונקטורים L_iF

משפט יהיו A ו- B חוגים ויהי $F : \text{Mod}\, A \to \text{Mod}\, B$ פונקטור אדיטיבי,
ויהי i מספר שלם. קיים פונקטור אדיטיבי יחיד (עד כדי איזומורפיזם)

$$L_iF = L^{-i}F : \text{Mod}\, A \to \text{Mod}\, B$$

עם התכונות הבאות

1) יהי $M \in \text{Mod}\, A$ ותהי $\eta : P \to M$ רזולוציה פרויקטיבית אז יש איזומורפיזם

$$c^i_\eta : H^{-i} F P \xrightarrow{\simeq} L_iFM$$

ב- $\text{Mod}\, A$.

2) יהי $\varphi : M \to N$ מורפיזם ב- $\text{Mod}\, A$,
יהיו $\eta : P \to M$ ו- $\zeta : Q \to N$ רזולוציות
פרויקטיביות, ויהי $\tilde\varphi : P \to Q$ הרמה של φ,
כלומר $\zeta \circ \tilde\varphi = \varphi \circ \eta$. אז

$$L_iF(\varphi) \circ c^i_\eta = c^i_\zeta \circ H^{-i}F(\tilde\varphi)$$

הגדרה L_iF נקרא הפונקטור הנגזר השמאלי ה- i של F.

הוכחת המשפט

קיום לכל $M \in \text{Mod}\, A$ נבחר רזולוציה פרויקטיבית
$\eta_M : P_M \to M$ נגדיר

$$L_iFM := H^{-i}FP_M \in \text{Mod}\, B$$

לכל מורפיזם $\varphi : M \to N$ ב- $\text{Mod}\, A$ נבחר הרמה
$\tilde\varphi : P_M \to P_N$. נגדיר

(15)

$$L_iF(\varphi) := H^{-i}F(\tilde\varphi) : \underset{L_iFM}{\underset{\parallel}{H^{-i}FP_M}} \to \underset{L_iFN}{\underset{\parallel}{H^{-i}FP_N}}$$

ברור כי $L_iF(1_M) = 1_{L_iFM}$ עתה

$\psi: N\to L$ מורפיזם ב- $\underline{\mathrm{Mod}\,A}$ אז כי

$$L_iF(\psi\circ\varphi) = L_iF(\psi)\circ L_iF(\varphi)$$

כי $\tilde\psi\circ\tilde\varphi: P_M\to P_L$ הינו הרמה של $\psi\circ\varphi: M\to N$. לכן בהכרח הדברים $\widetilde{\psi\circ\varphi}, \tilde\psi\circ\tilde\varphi: P_M\to P_L$ הומוטופיים. לכן

$$H^{-i}F(\tilde\psi\circ\tilde\varphi) = H^{-i}F(\widetilde{\psi\circ\varphi})$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$H^{-i}F(\tilde\psi)\circ H^{-i}F(\tilde\varphi) \qquad L_iF(\psi\circ\varphi)$$

$$\parallel$$

$$L_iF(\psi)\circ L_iF(\varphi)$$

אם כן L_iF הינו פונקטור.

עתה - להראות שזה פונקטור אדיטיבי:

עתה $\varphi, \psi: M\to N$ מורפיזמים ב- $\underline{\mathrm{Mod}\,A}$

אז $\tilde\varphi+\tilde\psi: P_M\to P_N$ הינו הרמה של קומפלקסים של $\varphi+\psi$. לכן $\widetilde{\varphi+\psi}\sim\tilde\varphi+\tilde\psi$,

ולכן

$$H^{-i}F(\tilde\varphi+\tilde\psi) = H^{-i}F(\widetilde{\varphi+\psi})$$

$$\parallel \qquad\qquad \parallel$$

$$L_iF(\varphi)+L_iF(\psi) \qquad L_iF(\varphi+\psi)$$

ב) יחידות. עתה $G: \underline{\mathrm{Mod}\,A}\to\underline{\mathrm{Mod}\,B}$ פונקטור המקיים

1) קיים $b_\eta: H^{-i}FP \xrightarrow{\simeq} GM$ לכל $\eta: P\to M$

2) מקיים $G(\varphi)\circ b_\eta = b_\xi\circ H^{-i}F(\tilde\varphi)$ לכל $\varphi: M\to N$,

לכל $\eta: P\to M$, $\xi: Q\to N$ לכל הרמה $\tilde\varphi: P\to Q$

עבור M ב- Mod A

נגדיר איזומורפיזם $\nu_M: L_iFM \xrightarrow{\sim} GM$ ב- Mod B

ע"י $\nu_M := b_{\eta_M} \circ c^{-1}_{\eta_M}$,

כאשר $\eta_M: P_M \to M$ הרזולוציה הקודמת.

ברור שאם $\varphi: M \to N$ ב- Mod A ו- $\tilde{\varphi}$ הרמה של φ, אז יש קומוטטיביות:

$$\begin{tikzcd}
L_iFM \arrow[r, "L_iF(\varphi)"] \arrow[dd, bend right=60, "\nu_M"'] & L_iFN \arrow[dd, bend left=60, "\nu_N"] \\
H^{-i}F(P_M) \arrow[u, "c_\eta", "\cong"'] \arrow[r, "H^{-i}F(\tilde{\varphi})"] \arrow[d, "b_\eta"', "\cong"] & H^{-i}FP_N \arrow[u, "c_\eta"', "\cong"] \arrow[d, "b_\eta", "\cong"'] \\
GM \arrow[r, "F(\varphi)"] & GN
\end{tikzcd}$$

לכן $\nu: L_iF \xrightarrow{\sim} G$ איזומורפיזם טבעי. מ.ש.ל

Goen

תהי $0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$

סדרה קצרה מדויקת ב- Mod A. יהי

$F: \text{Mod } A \to \text{Mod } B$

פונקטור אדיטיבי. אזי לכל i יש הומומורפיזם

$\partial_i = \partial^{-i}: L^{-i}FM'' \to L^{-i+1}FM'$

כך שהסדרה

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & L^{-i}FM' \arrow[r, "L^{-i}F(\varphi)"] & L^{-i}FM \arrow[r, "L^{-i}F(\psi)"] & L^{-i}FM'' \arrow[dll, "\partial^{-i}"'] \\
& L^{-i+1}FM' \arrow[r, "L^{-i+1}F(\varphi)"] & L^{-i+1}FM \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

מדויקת.

למת פרסה 1

תהי $0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$

סדרה מדויקת. אז יש מודולים פרויקטיביים P', P, P'',

ופונקציות M', M, M'' קומוטטיביות

(*)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{\bar\varphi} & N & \xrightarrow{\bar\psi} & N'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \alpha''} & & \\
0 & \longrightarrow & P' & \xrightarrow{\Phi} & P & \xrightarrow{\Psi} & P'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \eta'} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta''} & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\psi} & M'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

שכל השורות והעמודות מדויקות.

הוכחה: נבחר מודולים פרויקטיביים P' ו- P'' ופונקציות על $\eta': P' \twoheadrightarrow M'$ ו- $\eta'': P'' \twoheadrightarrow M''$

מכיוון ש- $\psi: M \twoheadrightarrow M''$ הוא על יש הרמה

$\tilde\eta'': P'' \to M$ של η''

נגדיר $P := P' \oplus P''$

נגדיר $\eta := (\varphi \circ \eta', \tilde\eta'') : P \to M$

כעת נגדיר $N' := Ker(\eta')$, $N := Ker(\eta)$

ו- $N'' := Ker(\eta'')$, ויהיו $\alpha': N' \to P'$ וכו' ההכלות.

נגדיר $\bar\varphi: N' \to N$ להיות הצמצום של Φ ל- N', ונגדיר $\bar\Psi: N \to N''$ להיות הצמצום של Ψ ל- N.

תרגיל: להוכיח שהדיאגרמה (*) קומוטטיבית.

נשאר להוכיח שהשורות והעמודות מדויקות. דרך שלמה: הלמה והשורות מדויקות, לכן השלמה

(118)

הומולוגיה בשלמות של P וכן M.

תרגיל: בלמה הנאמנה המצורפת - M, כאשר $\varphi: P \to M$ הוא על.

הוכח יש שרשרת הקומפלקסים הארוכה ...

ואז הגדרה הלמה נמשכת דרך ... (*)

" P הנ"ל

$$\begin{array}{ccccccccc}
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & N'' & \to & P'' & \to & M'' & \to & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & N & \to & P & \to & M & \to & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & N' & \to & P' & \to & M' & \to & 0 \\
& & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
& & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

כל סדרה קצרה מדויקת של קומפלקסים יוצרת סדרה של
ארוכה מדויקת:

$0 \to N \to P \to M \to 0$

$$\cdots \to H^{i-1}M \xrightarrow{\delta} H^iN \to H^iP \to \cdots$$

עכשיו $H^iM = 0$ לכל $i \Leftarrow N$ ...

טענה עבור 2 קבוע:

$$0 \to M' \xrightarrow{\varphi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$$

סדרה קצרה מדויקת ניתן לבנות רזולוציות פרויקטיביות $P' \to M'$, $P \to M$ ו-$P'' \to M''$ ורזולוציה פרויקטיבית

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & P' & \xrightarrow{\tilde\varphi} & P & \xrightarrow{\tilde\psi} & P'' & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \eta'} & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta''} & & \\ 0 & \to & M' & \xrightarrow{\varphi} & M & \xrightarrow{\psi} & M'' & \to & 0 \end{array}$$

כך שהסדרה המתקבלת היא סדרה מדויקת של קומפלקסים

הוכחה תרגיל אינדוקטיבי בטענה עבור 1

הוכחת המשפט. ניקח רזולוציות כמו בטענה עבור 2. אז יש איזומורפיזמים

$$\left.\begin{array}{l} L_iFM' \cong H^{-i}FP' \; : c_{M'} \\ L_iFM \cong H^{-i}FP \; : c_M \\ L_iFM'' \cong H^{-i}FP'' \; : c_{M''} \end{array}\right\} \text{כך ש} \quad \begin{array}{l} L_iF(\varphi) = H^{-i}F(\tilde\varphi) \\ L_iF(\psi) = H^{-i}F(\tilde\psi) \end{array}$$

נתבונן בסדרה המדויקת

$$0 \to P'^i \xrightarrow{\tilde\varphi^i} P^i \xrightarrow{\tilde\psi^i} P''^i \to 0$$

זו סדרה מתפצלת ($P^i \cong P'^i \oplus P''^i$)

לכן הסדרה

$$0 \to FP'^i \xrightarrow{F(\tilde\varphi^i)} FP^i \xrightarrow{F(\tilde\psi^i)} FP''^i \to 0$$

מדויקת. וזו סדרה מדויקת של קומפלקסים

$$0 \to FP' \xrightarrow{F(\varphi)} FP \xrightarrow{F(\psi)} FP'' \to 0$$

היא מדויקת — לכן יש הומומורפיזם מקשר

$$\partial^i : H^i FP'' \to H^{i+1} FP'$$ כך שהסדרה

$$\cdots \to H^{-i} FP' \to H^{-i} FP \to H^{-i} FP'' \xrightarrow{\partial^{-i}} H^{-i+1} FP' \to H^{-i+1} FP \to \cdots$$

מדויקת — נגדיר $\partial^i : L^{-i} FM'' \to L^{-i+1} FM'$ ע"י

$$\partial^i := c_{\eta'}^{-i+1} \circ \partial^{-i} \circ \left(c_{\eta''}^{-i}\right)^{-1}$$

הפונקטורים Tor_i

הגדרה יהי A חוג ויהי M A-מודול ימני. נגדיר פונקטור ע"י
$$\begin{cases} F: \mathrm{Mod}\,A \to Ab \\ FN = M \otimes_A N \end{cases}$$

עבור $i \geq 0$ נגדיר
$$^{I}\mathrm{Tor}_i^A(M,-) := L_iF : \mathrm{Mod}\,A \to Ab$$

משפט 1) יש איזומורפיזם טבעי
$$^{I}\mathrm{Tor}_0^A(M,-) \cong M \otimes_A -$$

2) M שטוח $\Leftarrow$ $^{I}\mathrm{Tor}_i^A(M,N)=0$ לכל $i \geq 1$ ולכל N

הוכחה 1) כי F פונקטור מדויק מימין.
2) שטוחות כי F מדויק. ∎

משפט לכל i ההתאמה
$$(M,N) \mapsto \mathrm{Tor}_i^A(M,N)$$
היא פונקטור
$$(\mathrm{Mod}\,A^{op}) \times (\mathrm{Mod}\,A) \to Ab$$

הוכחה בהינתן הומ' $\varphi: M_1 \to M_2$ ב- $\mathrm{Mod}\,A^{op}$ נקבל טרנספורמציה טבעית $F_1 \to F_2$, כאשר $F_j = M_j \otimes_A - : \mathrm{Mod}\,A \to Ab$ ... ונקבל $\mathrm{Tor}_i^A(M_1,N) \to \mathrm{Tor}_i^A(M_2,N)$ צריך לבדוק ∎

משפט יהיו $F,G: \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}\,B$ פונקטורים אדיטיביים, ותהי $\psi: F \to G$ ט"ט.

כעת נעשה דבר דואלי הפוך:

הגדרה דואלי: $N \in A\underline{\text{Mod}}$ נגדיר פונקטור

$$G : \begin{cases} \underline{\text{Mod}}\,A^{op} \to \underline{Ab} \\ M \mapsto M \otimes_A N \end{cases}$$

לכל i נגדיר ${}^{II}Tor_i^A(-,N) := L_i G : \underline{\text{Mod}}\,A^{op} \to \underline{Ab}$

תכונות דואליות ל- ${}^{I}Tor$

משפט לכל i יש בי-פונקטור

$$Tor_i^A(-,-) : (\underline{\text{Mod}}\,A^{op}) \times (A\underline{\text{Mod}}) \to \underline{Ab}$$

עם איזומורפיזם טבעי $Tor_0^A(-,-) \cong - \otimes_A -$,

$$Tor_i^A(M,-) \cong {}^{I}Tor_i^A(M,-)$$

ו- $Tor_i^A(-,N) \cong {}^{II}Tor_i^A(-,N)$

לכל $M \in \underline{\text{Mod}}\,A^{op}$, $N \in A\underline{\text{Mod}}$ ו- $i \geq 0$.

ההוכחה בשבוע הבא

[RD] וייבל:

מכפלה טנזורית של קומפלקסים

הגדרה: יהי $M \in C(\text{Mod}\,A^{op})$ ו- $N \in C(\text{Mod}\,A)$. נגדיר קומפלקס חדש $M \otimes_A N \in C(Ab)$ באופן הבא.

$$(M \otimes_A N)^i := \bigoplus_{j+k=i} M^j \otimes_A N^k$$

הדיפרנציאל: עבור $m \in M^j$ ו- $n \in N^k$ נגדיר

$$d(m \otimes n) := d(m) \otimes n + (-1)^j m \otimes d(n)$$

(כלל לייבניץ של מכפלה)

(בדיקה: $d \circ d = 0$)

החרוט (cone) של המורפיזם

יהי $i \in \mathbb{Z}$

הגדרה: יהי (M, d) קומפלקס. נגדיר קומפלקס חדש $(M[i], d_{M[i]})$ ע"י

$$(M[i])^j := M^{i+j}$$

$$d^j_{M[i]} := (-1)^i d^{i+j}_M : \underbrace{M[i]^j}_{M^{i+j}} \to \underbrace{M[i]^{j+1}}_{M^{i+j+1}}$$

הגדרה: יהי $\varphi : M \to N$ המורפיזם של קומפלקסים. החרוט $C(\varphi)$ הוא הקומפלקס

$$C(\varphi) := N \oplus M[1] = \begin{bmatrix} N \\ M[1] \end{bmatrix}$$

עם דיפרנציאל $d := \begin{bmatrix} d_N & \varphi \\ 0 & d_{M[1]} \end{bmatrix}$, כלומר

$$d^i : \begin{bmatrix} N^i \\ M^{i+1} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} N^{i+1} \\ M^{i+2} \end{bmatrix}$$

$$d^i = \begin{bmatrix} d^i_N & \varphi^{i+1} \\ 0 & -d^{i+1}_M \end{bmatrix}$$

כאשר $\varphi^{i+1} : (M[1])^i = M^{i+1} \to N^{i+1}$

~~טענה~~ (1) $d\circ d=0$

הוכחה:

$$\begin{bmatrix} d_N^{i} & \varphi^{i+1} \\ 0 & -d_M^{i+1} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} d_N^{i-1} & \varphi^{i} \\ 0 & -d_M^{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underbrace{d^i\circ d^{i-1}}_{=0} & \underbrace{d_N^{i}\circ\varphi^{i}-\varphi^{i+1}\circ d_M^{i}}_{=0} \\ 0 & \underbrace{d^{i+1}\circ d^{i}}_{=0} \end{bmatrix}$$

ד

טענה (2) $\varphi: M\to N$ קוואזי-איזומורפיזם אם"ם $C(\varphi)$ אציקלי.

"הוכחה" חלק ידי ,,, (תרגיל).

~~טענה (3) יהי $F: \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}\,B$ פונקטור אדיטיבי. אז~~
~~$\varphi: M\to N$ ב $\mathrm{Mod}\,A$ אז~~

$$\cancel{F(C(\varphi)) \cong C(F(\varphi))}$$

~~הוכחה~~

$$\cancel{F\left(\begin{bmatrix} N \\ M[1] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_N & \varphi \\ 0 & d_{M[1]} \end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix} FN \\ FM[1] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} F(d_N) & F(\varphi) \\ 0 & F(d_{M[1]}) \end{bmatrix}\right)}$$

ד

טענה (4) יהי $\eta: P\to M$ הומ' k-מודולים
מעל A^{op} ויהי Q מודול מעל A.
אז

$$C(\eta)\otimes_A Q \cong C(\eta\otimes 1_Q: P\otimes_A Q\to M\otimes_A Q)$$

כקומפלקסים מעל $\mathbb{Z}$

"הוכחה": חלק ישיר.

$$\begin{pmatrix} M \\ P[1] \end{pmatrix}\otimes_A Q \cong \begin{pmatrix} M\otimes_A Q \\ (P\otimes_A Q)[1] \end{pmatrix}$$

(bounded above)

קומפלקס M נקרא חסום מלמעלה אם $M^i=0$
עבור $i \gg 0$.

משפט X יהי M קומפלקס חסום מלמעלה ומאולך של A
יהי P קומפלקס חסום מלמעלה של A כך ש-
P^i שטוח לכל הקומפלקס

$M\otimes_A P$ מאולך?

(החלפת $M \leftrightarrow N$ ו- $P \leftrightarrow Q$ אפשר לעשות כי
$M^i = P^i = 0$ לכל $i \gg 0$.)

אני רוצה $H^j(M\otimes_A P)=0$

הוכחה. צריך להראות כי $H^j(M\otimes_A P)=0$ די להראות
כי $0=H^j(M\otimes F_{j-1}P)$ עבור $M\otimes_A F_i P$
מאולך לכל i באינדוקציה על $i=0,-1,\dots$

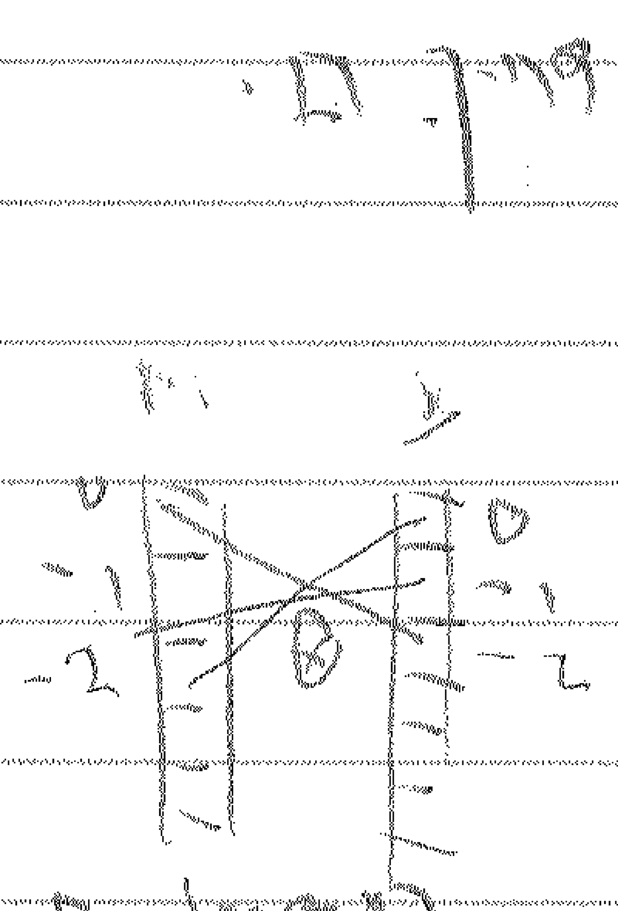
עבור $i=0$ זה ברור, כי $F_0 P = P^0$
וזה A-מודול שטוח. נניח $i<0$ ו- סדרה מדויקת
מפוצלת של קומפלקסים

$$0 \to F_{i+1}P \to F_i P \to P^i[-i] \to 0$$

ולכן יש סדרה מדויקת

$$0 \to M\otimes_A F_{i+1}P \to M\otimes_A F_i P \to M\otimes_A P^i[-i] \to 0$$

הקומפלקס $M\otimes F_{i+1}P$ מאולך לפי הנחת האינדוקציה.
הקומפלקס $(M\otimes P^i)[-i] = (M\otimes_A P^i)[-i]$ מאולך כי P^i שטוח.
הסדרה הארוכה של הקוהומולוגיה $\Rightarrow$ $M\otimes_A F_i P$ מאולך. מ.ש.ל.



$$F_i P := (\cdots \to 0 \to P^i \to \cdots \to P^{-1} \to P^0 \to \cdots)$$

זהו תת-קומפלקס של P כלומר

$$F_i(M\otimes_A P) = F_i(M\otimes_A F_i P)$$

$$H^j F_i(M\otimes_A P) = H^j(M\otimes_A P)$$

$$H^j F_i(M\otimes F_i P) = H^j(M\otimes F_i P) \qquad \text{עבור } j \geq i+1$$

26

הגדרת הפונקטור של Tor

נקח $M \in \underline{\mathrm{Mod}}\, A^{op}$ נבחר רזולוציה פרויקטיבית $\eta_M : P_M \to M$. נקח $N \in \underline{\mathrm{Mod}}\, A$ נבחר רזולוציה פרויקטיבית

$$\zeta_N : Q_N \to N$$

נגדיר

$$\mathrm{Tor}_i^A(M, N) := H^{-i}(P_M \otimes_A Q_N) \in \underline{\mathrm{Ab}}$$

נקח הומ' $\varphi : M_1 \to M_2$ ב- $\underline{\mathrm{Mod}}\, A^{op}$

נבחר הרמה $\tilde{\varphi} : P_{M_1} \to P_{M_2}$

ובדומה ל- $\psi : N_1 \to N_2$ ~ $\tilde{\psi} : Q_{N_1} \to Q_{N_2}$

הומומורפיזם בקטגוריה $(\varphi, \psi) : (M_1, N_1) \to (M_2, N_2)$

$$(\underline{\mathrm{Mod}}\, A^{op}) \times (\underline{\mathrm{Mod}}\, A)$$

נגדיר

$$\mathrm{Tor}_i^A(\varphi, \psi) := H^{-i}(\tilde{\varphi} \otimes \tilde{\psi})$$

בגלל האוניברסליות זה פונקטור.

נדון בקוואזי-איזומורפיזמים של המורפיזמים:

$$P_M \otimes_A N \xleftarrow{1 \otimes \zeta_N} P_M \otimes_A Q_N \xrightarrow{\eta_M \otimes 1} M \otimes_A Q_N$$

נזכר כי $\eta_M : P_M \to M$ קוואזי-איזו' . הוא הקונוס $C(\eta_M)$ אציקלי (שיעור 3) לכן $\times$

הקומפלקס $C(\eta_M) \otimes_A Q$ אציקלי

(127)

גם שלב 3, $C(\eta_M \otimes 1_Q)$

ולסיום נקבל גם שלב 2: $\eta_M \otimes 1_Q$

קוואזי-איזו. בסוף $1_P \otimes \xi_N$ קוואזי-איזו.

נקבל איזומורפיזם

$$\begin{array}{ccc}
{}^{II}\mathrm{Tor}_i^A(M,N) = H^{-i}(P_M \otimes_A N) & & H^{-i}(M \otimes_A Q_N) = {}^{I}\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \\
H^{-i}(1 \otimes \xi_N) \searrow \cong & & \cong \swarrow H^{-i}(\eta_M \otimes 1) \\
& H^{-i}(P_M \otimes_A Q_N) = \mathrm{Tor}_i^A(M,N) &
\end{array}$$

בדיקה: זה איזומורפיזם טבעי. ∎

מסקנה אם M שטוח או N שטוח אז $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)=0$ לכל $i \geq 1$.

הוכחה: אם M שטוח אז ${}^{I}\mathrm{Tor}_i = 0$

אם N — ${}^{II}\mathrm{Tor}_i = 0$

∎

משפט יהי $N \in A\text{-}\mathrm{Mod}$. התנאים הבאים שקולים: (בדומה לאפיון האינג'קטיבי)

(i) N שטוח.

(ii) $\mathrm{Tor}_1^A(M,N)=0$ לכל $M \in \mathrm{Mod}\,A^{op}$

(iii) $\mathrm{Tor}_i^A(M,N)=0$ לכל $M \in \mathrm{Mod}\,A^{op}$ ולכל $i \geq 1$.

הוכחה: (iii) $\Leftarrow$ (ii) טריוויאלי. (i) $\Leftarrow$ (iii) הוכחנו כבר.

נותר להוכיח (ii) $\Leftarrow$ (i). יהי $\varphi: N' \hookrightarrow N$.

צ"ל: $1_M \otimes \varphi: M \otimes_A N' \to M \otimes_A N$ חח"ע. נגדיר

$N'' := \mathrm{Coker}(\varphi)$. יש סדרה מדויקת קצרה →

$$0 \to N' \xrightarrow{\varphi} N \to N'' \to 0$$

ולכן סדרה מדויקת

$$\to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\mathrm{Tor}_1^A(M,N'')} \xrightarrow{\partial} M\otimes_A N' \hookrightarrow M\otimes_A N \to M\otimes_A N'' \to 0$$

$\square$