

פונקציות פוליגורמיות

הפונקציה F היא פוליגורמית ב- K וקיימת פונקציה F^{-1} א- B וקיימת פונקציה F א- B וקיימת פונקציה F א- B

$$F: \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$$

הפונקציה F היא פוליגורמית ב- K וקיימת פונקציה F^{-1} א- B וקיימת פונקציה F א- B

$$F: \text{Hom}_A(M_1, M_2) \rightarrow \text{Hom}_B(FM_1, FM_2)$$

הפונקציה F היא פוליגורמית ב- K וקיימת פונקציה F^{-1} א- B וקיימת פונקציה F א- B

הפונקציה F היא פוליגורמית ב- K וקיימת פונקציה F^{-1} א- B וקיימת פונקציה F א- B

$$\text{Hom}_A(M_1, M_2) \times \text{Hom}_A(M_2, M_3) \rightarrow \text{Hom}_A(M_1, M_3)$$

הפונקציה $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ היא פוליגורמית ב- K וקיימת פונקציה φ^{-1} א- B וקיימת פונקציה φ א- B

הפונקציה F היא פוליגורמית ב- K וקיימת פונקציה F^{-1} א- B וקיימת פונקציה F א- B

הפונקציה F היא פוליגורמית ב- K וקיימת פונקציה F^{-1} א- B וקיימת פונקציה F א- B

-1 M, N F R A $\varphi, \psi \in \text{Hom}_A(M, N)$

$FM \ni \{m_s\}_{s \in S}$

$F(\varphi) : FM \rightarrow FN$

$$F(\varphi)(\{m_s\}) = \{\varphi(m_s)\}_{s \in S}$$

$$F(\psi)(\{m_s\}) = \{\psi(m_s)\}_{s \in S}$$

$$\begin{aligned} F(\varphi + \psi)(\{m_s\}) &= \{(\varphi + \psi)(m_s)\}_{s \in S} \\ &= \{\varphi(m_s)\}_{s \in S} + \{\psi(m_s)\}_{s \in S} \\ &= F(\varphi)(\{m_s\}) + F(\psi)(\{m_s\}) \end{aligned}$$

$$F(\varphi) + F(\psi) = F(\varphi + \psi)$$

... F ...

$M \otimes_A N \cong M \otimes_A N$... $M \otimes_A A \cong M$

$$F(\varphi) : M_1 \otimes_A N \rightarrow M_2 \otimes_A N$$

$$F(\varphi) = \varphi \otimes 1_N$$

$M \otimes_A N$...

$F: \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$ (a)

$F(\bigoplus_{i=1}^r M_i) \cong \bigoplus_{i=1}^r FM_i$

פונקציה מודולרית \downarrow

הפונקציה F היא מודולרית

$\varphi_i: M_i \rightarrow M$ (b)

הפונקציה φ_i היא מודולרית

$\pi_i: M \rightarrow M_i$ (c)

$(M = \bigoplus_{i=1}^r M_i)$ (b)

הפונקציה π_i היא מודולרית

$\pi_i \circ \varphi_i = \mathbb{1}_{M_i}$

$\sum_{i=1}^r \varphi_i \circ \pi_i = \mathbb{1}_M$

$F(\pi_i): FM \rightarrow FM_i$ (d)

$F(\varphi_i): FM_i \rightarrow FM$ (e)

הפונקציה F היא מודולרית

$F(\pi_i) \circ F(\varphi_i) = F(\pi_i \circ \varphi_i)$ (f)

$= F(\mathbb{1}_{M_i}) = \mathbb{1}_{FM_i}$

$\sum_{i=1}^r F(\varphi_i) \circ F(\pi_i) = \sum_{i=1}^r F(\varphi_i \circ \pi_i)$ (g)

$= F(\sum_{i=1}^r \varphi_i \circ \pi_i) = F(\mathbb{1}_M) = \mathbb{1}_{FM}$

$\bigoplus_{i=1}^r FM_i \xrightarrow{\bigoplus F(\varphi_i)} FM$

\downarrow (h)

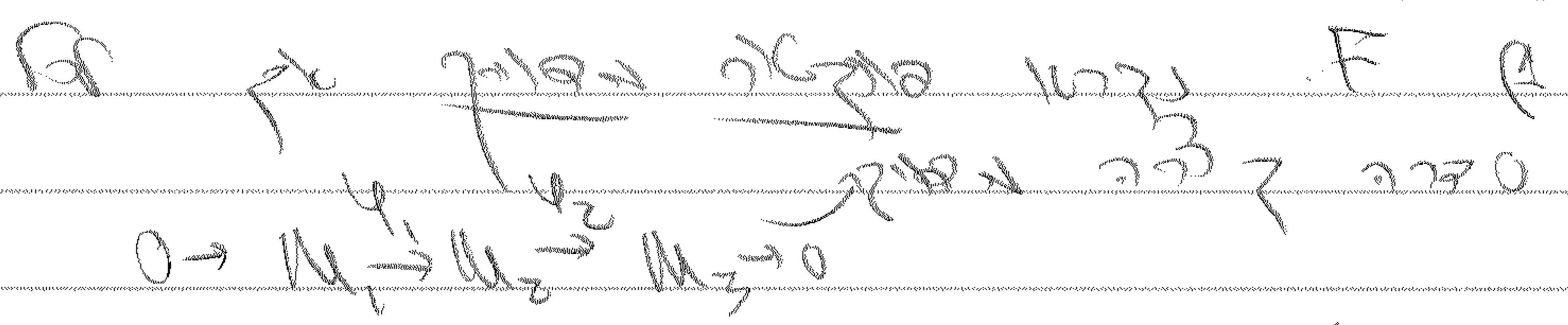
$\pi F(\pi_i)$ (i)

הפונקציה $\pi F(\pi_i)$ היא מודולרית

הומומורפיזם

$$F: \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$$

הומומורפיזם
הומומורפיזם



$$0 \rightarrow FM_1 \xrightarrow{F(\varphi_1)} FM_2 \xrightarrow{F(\varphi_2)} FM_3 \rightarrow 0$$

הומומורפיזם
26.12

הומומורפיזם

אם φ הוא הומומורפיזם F אז

$$M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0$$

$$FM_1 \rightarrow FM_2 \rightarrow FM_3 \rightarrow 0$$

הומומורפיזם

אם φ הוא הומומורפיזם F אז

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3$$

$$0 \rightarrow FM_1 \rightarrow FM_2 \rightarrow FM_3$$

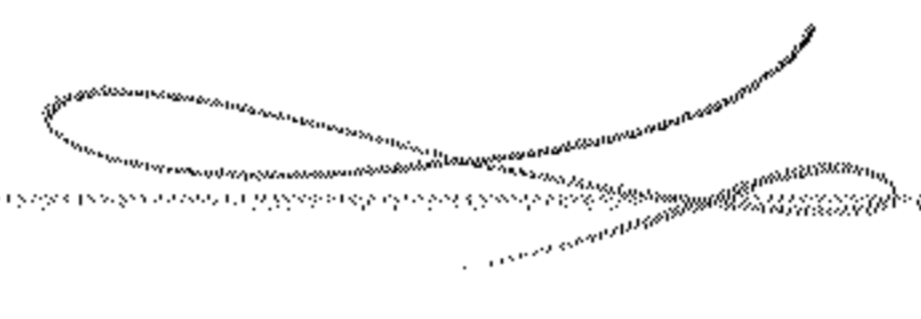
הומומורפיזם

N הומומורפיה : הומומורפיה A הומומורפיה
 $F: \underline{M} \rightarrow A$ הומומורפיה
 $FM := M \otimes_A N$ הומומורפיה

הומומורפיה הומומורפיה N הומומורפיה F הומומורפיה הומומורפיה
הומומורפיה הומומורפיה N הומומורפיה F הומומורפיה

הומומורפיה S הומומורפיה A הומומורפיה
 $F: \underline{M} \rightarrow A$ הומומורפיה
 $FM := M^S = \text{Hom}_S(S, M)$ הומומורפיה

הומומורפיה הומומורפיה S הומומורפיה M הומומורפיה
 $FM \cong \sum_{i \in I} M$ הומומורפיה
הומומורפיה (S, M) הומומורפיה $\sum_{i \in I} M$ הומומורפיה



הומומורפיה M^{-1} הומומורפיה A הומומורפיה
 $F: \underline{M} \rightarrow A$ הומומורפיה
 $FN := \text{Hom}_A(M, N)$ הומומורפיה

הומומורפיה $\varphi: N_1 \rightarrow N_2$ הומומורפיה
 $F(\varphi)(\psi) := \varphi \circ \psi$ הומומורפיה
 $\forall \psi \in \text{Hom}_A(M, N_1)$ הומומורפיה

הומומורפיה הומומורפיה F הומומורפיה

(79)

$$0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_3$$

העתקה ממשורה אחת למשורה אחרת

$$\text{for } F(\varphi_1): FN_1 \rightarrow FN_2 \quad (i) = \beta$$

$$FN_2 \supset \text{Ker}(F(\varphi_2)) = \text{Im}(F(\varphi_1)) \quad (ii)$$

$$F(\varphi_1)(\psi) = 0 \iff \psi = 0 \iff \varphi_1 \circ \psi = 0 \iff \psi = 0$$

$\psi \in \text{Hom}_A(M, N_1)$ is

$$\text{for } F: FN_1 \rightarrow FN_2 \implies \varphi_2 \circ \varphi_1 = 0 \iff \text{for } \psi \in \text{Hom}_A(M, N_1) \text{ is}$$

$$F(\varphi_2) \circ F(\varphi_1) = F(\varphi_2 \circ \varphi_1) = F(0) = 0$$

$$\text{Im}(F(\varphi_1)) \subset \text{Ker}(F(\varphi_2))$$

$$\psi \in \text{Hom}_A(M, N_2) \text{ is } \psi \in \text{Ker}(F(\varphi_2)) \implies 0 = F(\varphi_2)(\psi) = \varphi_2 \circ \psi$$

$$\varphi_2(\psi(m)) = 0 \implies \psi(m) \in \text{Ker}(\varphi_2) = \text{Im}(\varphi_1)$$

$$\exists m' \in N_1 \text{ such that } \psi(m) = \varphi_1(m')$$
$$\psi': M \rightarrow N_1 \text{ such that } \varphi_1 \circ \psi' = \psi$$

$\psi' \in \text{Hom}_A(M, N_1)$ is

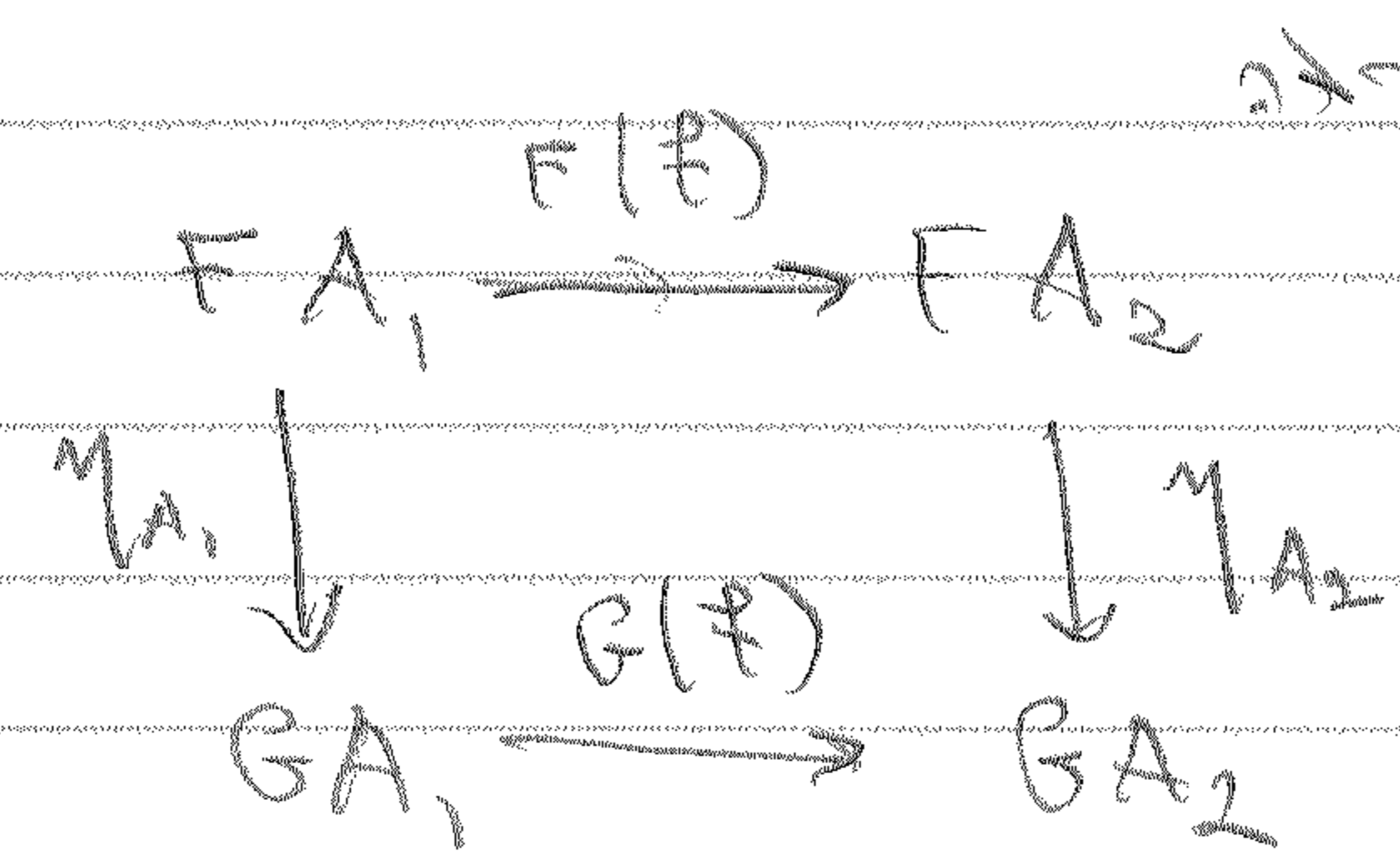
הקשר בין פונקציות

$f: A \rightarrow B$ $g: A \rightarrow B$ $f \neq g$ $f \neq g$
 פונקציות שונות פונקציות שונות פונקציות שונות

$\eta_A \in \text{Hom}_B (FA, GA)$

לכל $f \in \text{Hom}_A (A_1, A_2)$ \exists $g \in \text{Hom}_B (FA_1, GA_2)$
 פונקציה

$\eta_{A_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{A_1}$ $\eta_{A_2} \circ F(f) = G(f) \circ \eta_{A_1}$



פונקציה

$f: A \rightarrow B$ $g: A \rightarrow B$ $f \neq g$ $f \neq g$
 פונקציות שונות פונקציות שונות פונקציות שונות

$\eta: F \rightarrow G$ $\eta_A: FA \rightarrow GA$
 פונקציה

פונקציה
 פונקציה
 פונקציה

אלה הם כל ה־ $\mathbb{R}G$ המורכבים מ־ $\mathbb{R}G$
 $B \leftarrow A$ $\mathbb{R}G$ $\mathbb{R}G$

$\mathbb{1}_{FA}: FA \xrightarrow{\cong} FA$ מִן $\mathbb{R}G$ $\mathbb{R}G$

$\gamma_A: FA \xrightarrow{\gamma_A} GA \xrightarrow{\gamma_A} HA$

$\gamma: G \xrightarrow{\cong} H$ $\gamma: F \xrightarrow{\cong} G$ $\gamma: F \xrightarrow{\cong} H$
 $(\gamma \circ \gamma)_A := \gamma_A \circ \gamma_A: FA \xrightarrow{\cong} HA$

$\gamma^{-1}: G \xrightarrow{\cong} F$ $\gamma^{-1}_A := (\gamma_A)^{-1}: GA \xrightarrow{\cong} FA$

$FM := M^2$ $\gamma: F: M \cdot A \rightarrow M \cdot A$
 G

$GM := \mathbb{Z}^2 \otimes M$

$\gamma_M: FM \xrightarrow{\cong} GM$

$\gamma_M(m_1, m_2) := e_1 \otimes m_1 + e_2 \otimes m_2$

$\mathbb{Z}^2 \ni e_1, e_2$

$\varphi: (GM) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Mod } A}(B, A)$ הומומורפיזם
 $B \leftarrow A$ הומומורפיזם
הומומורפיזם הומומורפיזם

$$F: \text{Mod } B \rightarrow \text{Mod } A$$

$$G: \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$$

$$GM = B \otimes_A M$$

$$\eta: \mathbb{1}_{\text{Mod } A} \rightarrow FG$$

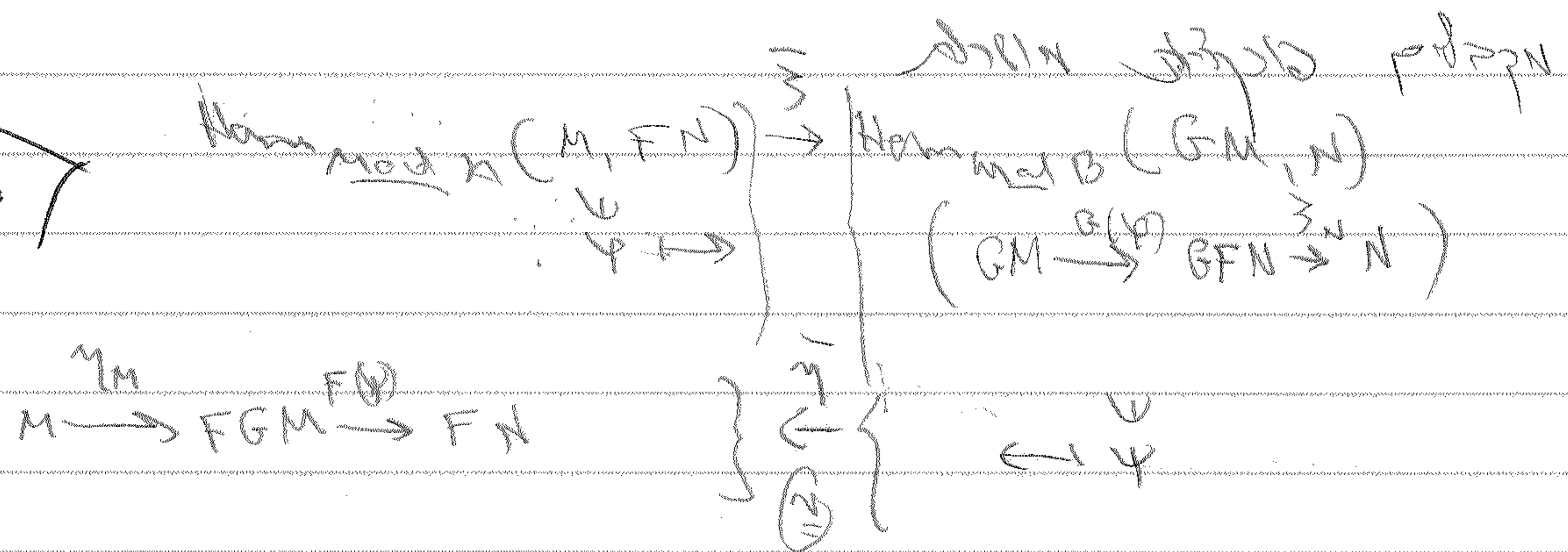
$$\eta_M(m) = 1 \otimes m, \quad \eta_M: M \rightarrow FGM$$

$$\zeta: \mathbb{1}_{\text{Mod } B} \leftarrow GF$$

$$\zeta_N: N \leftarrow GFN = B \otimes_A N$$

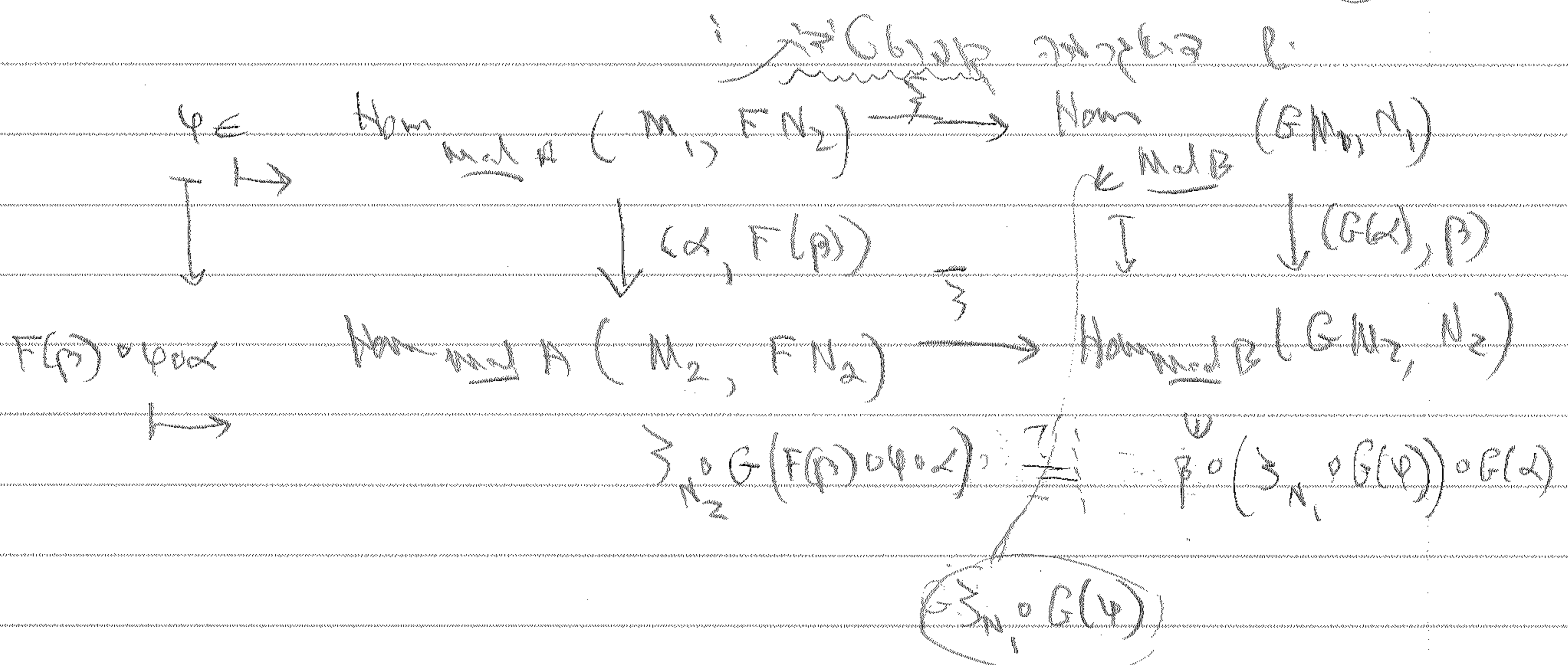
$$\zeta_N(b \otimes n) = b \otimes n$$

27.12



$\alpha: M_1 \rightarrow M_2$ הומומורפיזם
 $\beta: N_1 \rightarrow N_2$ הומומורפיזם

$\rightarrow \text{Mod } A \rightarrow \text{Mod } B$
הומומורפיזם



$$\begin{aligned} \exists_{N_2} \circ G(F(\rho) \circ \varphi \circ \alpha) &= \exists_{N_2} \circ G(F(\rho) \circ G(\varphi) \circ G(\alpha)) \\ &= \exists_{N_2} \circ G(F(\rho) \circ G(\varphi)) \circ G(\alpha) \\ &= \beta \circ \exists_{N_1} \circ G(\varphi) \circ G(\alpha) \end{aligned}$$

תורת המודלים

תורת המודלים של B היא A (תורת המודלים של A היא B)
 $G: B \rightarrow A$ $F: A \rightarrow B$
 תורת המודלים של B היא A (תורת המודלים של A היא B)
 תורת המודלים של A היא B (תורת המודלים של B היא A)
 (adjunction)

$$\exists: F \circ G \rightarrow \text{id}_B \rightarrow G \circ F$$

$$B \ni N \quad A \ni M \quad G \circ F \ni \rho$$

$$\begin{aligned} \exists: \text{Hom}_A(M, GN) &\rightarrow \text{Hom}_B(FM, N) \\ \rho &\mapsto \exists_N \circ F(\rho) \end{aligned}$$

תורת המודלים

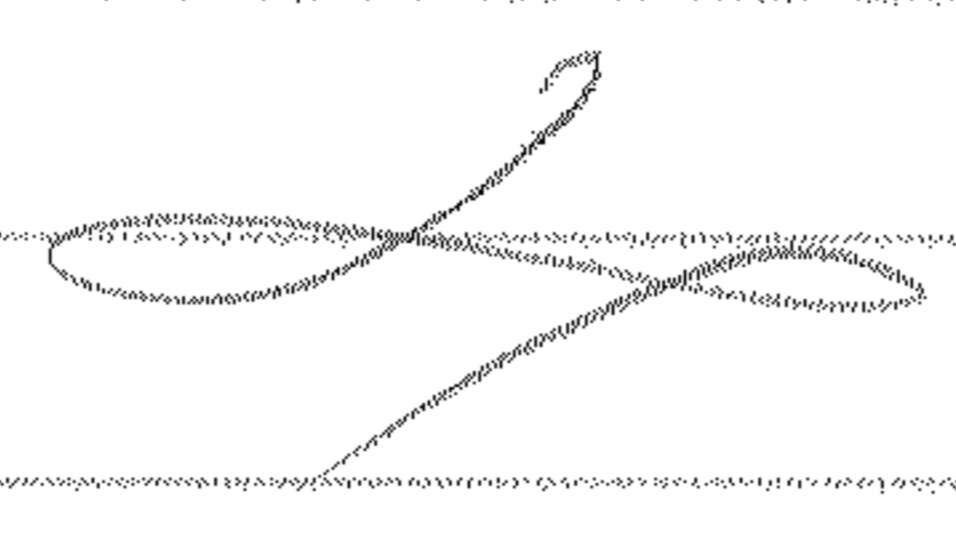
$$\eta: \mathbb{1}_A \rightarrow GF$$

ההומומורפיזם η הוא $\eta: \mathbb{1}_A \rightarrow GF$
 נקרא η ההומומורפיזם η בין $\mathbb{1}_A$ ל- GF

$$\mathbb{1}'_{FM} \in \text{Hom}_B(FM, FM)$$

(7.11)

$$\eta_M := \sum_{M, FM} \mathbb{1}'_{FM} \in \text{Hom}_A(M, GF_M)$$



$$F: \text{Mod } A \rightarrow \text{Set}$$

$$G: \text{Set} \rightarrow \text{Mod } A$$

$$\eta: \mathbb{1}_{\text{Set}} \rightarrow FG$$

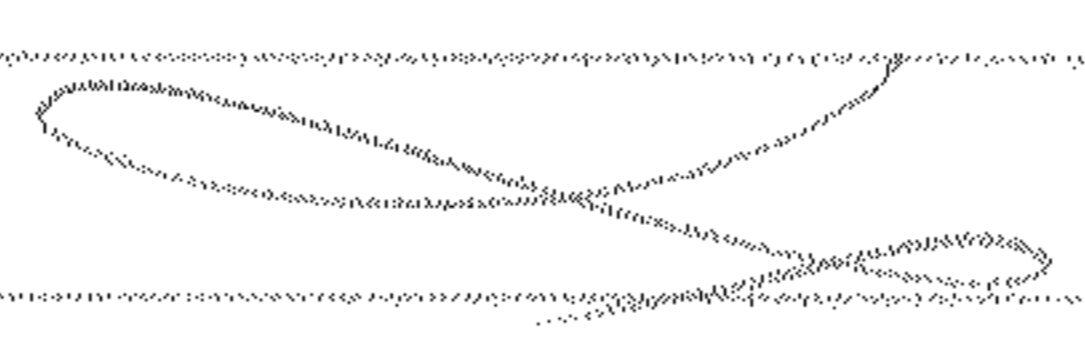
ההומומורפיזם η הוא $\eta: \mathbb{1}_{\text{Set}} \rightarrow FG$
 ההומומורפיזם η הוא $\eta: \mathbb{1}_{\text{Set}} \rightarrow FG$
 ההומומורפיזם η הוא $\eta: \mathbb{1}_{\text{Set}} \rightarrow FG$

$$\eta_S: S \rightarrow FG S$$

$$s \mapsto \delta_s$$

$$\overline{\eta}_{S, M}: \text{Hom}_{\text{Mod } A}(GS, M) \xrightarrow{\cong} \text{Hom}_{\text{Set}}(S, FM)$$

$$\psi \mapsto F(\psi) \circ \eta_S$$



ההומומורפיזם η

$$G: D \rightarrow D \quad F: C \rightarrow D$$

$$FG \cong \mathbb{1}_D \quad GF \cong \mathbb{1}_C$$



האובייקט $D = \text{Set}$ הוא קטגוריה של קבוצות

$$\text{Ob}(C) = \{ \{1, 2, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$$f_S = 1_S$$

הפונקציה $F: C \rightarrow \text{Set}_F = D$ היא פונקציה מ- C ל- D

הפונקציה F היא פונקציה מ- C ל- D והיא מוגדרת על ידי $F(S) = \{1, 2, \dots, |S|\}$

$$G: D \rightarrow C$$

$$G(\{1, 2, \dots, n\}) = \{1, 2, \dots, n\}$$

הפונקציה G היא פונקציה מ- D ל- C

$$G(f) = f \circ g \circ f^{-1}$$

$$GF = 1_C$$

$$f: FG \xrightarrow{\sim} 1_D$$

$$f := f_S^{-1}: FG_S = \{1, 2, \dots, |S|\} \xrightarrow{\sim} S$$

הפונקציה F היא פונקציה מ- C ל- D והיא מוגדרת על ידי $F(S) = \{1, 2, \dots, |S|\}$

$$\{K^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

τ (הקצאה) $\tau: B \rightarrow \mathbb{N}$

$\text{Hom}_B(n, m) := M_{m \times n}(K)$ → \mathbb{Z} \mathbb{N}

הרכבה: $\text{Hom}_B(n, m) \times \text{Hom}_B(m, p) \rightarrow \text{Hom}_B(n, p)$

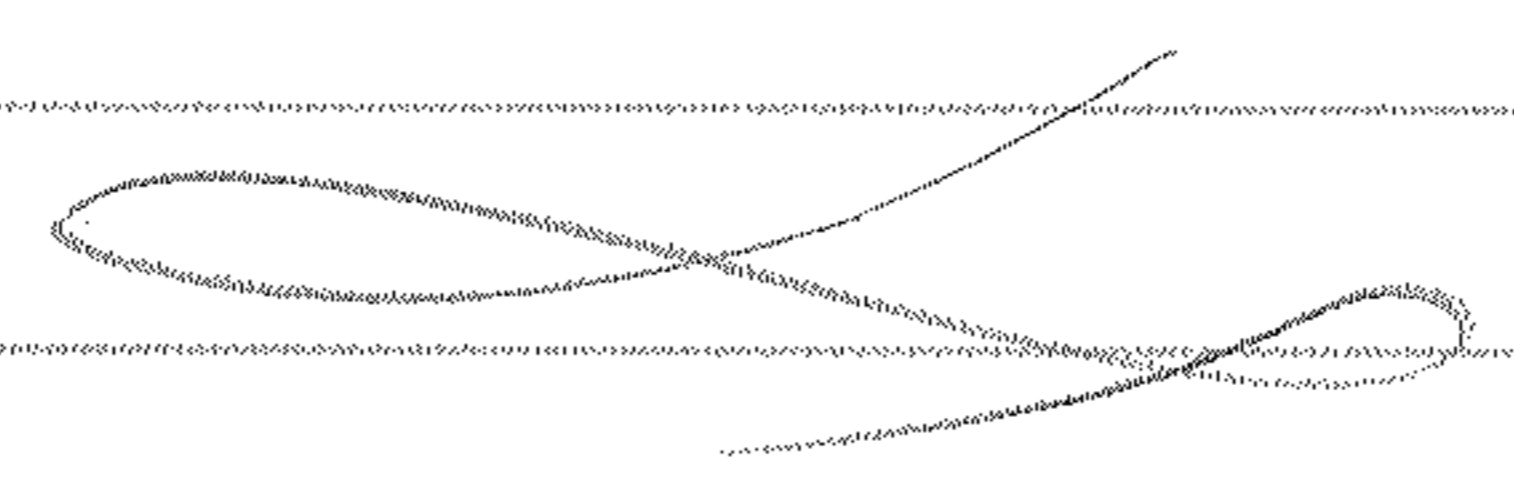
$\text{Hom}_B(n, m) \times \text{Hom}_B(m, p) \rightarrow \text{Hom}_B(n, p)$
 $g \circ f \mapsto hg$

הרכבה (composition) $B \cong C$ - τ τ τ
 $F: B \rightarrow C$ $G: C \rightarrow D$ $H: D \rightarrow E$

$(\text{Hom}_B(n, m) \times \text{Hom}_B(m, p)) \cong \text{Hom}_B(n, p)$

$\text{Hom}_B(n, m) \times \text{Hom}_B(m, p) \cong \text{Hom}_B(n, p)$

2.1.06



$F: C \rightarrow D$ $G: D \rightarrow E$ $H: E \rightarrow F$
 (F, G) (G, H) (H, I)

A B C D E F G H I
 $F: A \rightarrow B$ $G: B \rightarrow C$ $H: C \rightarrow D$ $I: D \rightarrow E$
 (F, G) (G, H) (H, I)

τ

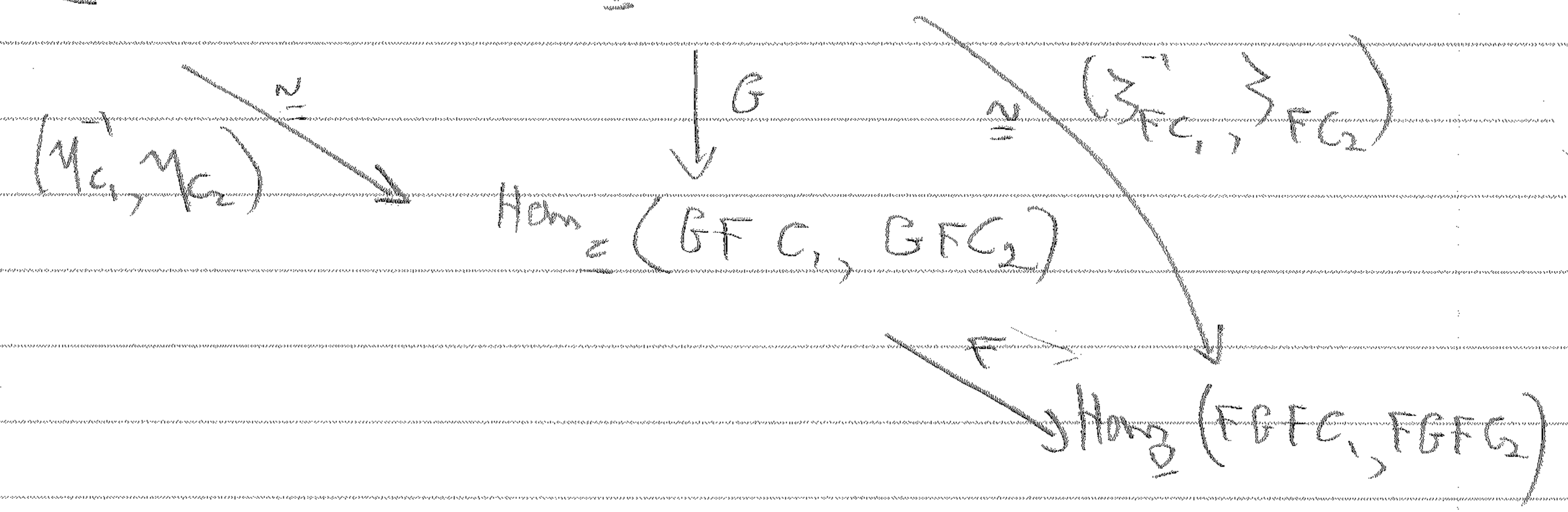
אפיון $F: C \rightarrow D$ מכל $A \rightarrow B$
 אפיון $C \ni c_1, c_2$ ב D של c

$$F: \text{Hom}_C(c_1, c_2) \rightarrow \text{Hom}_D(Fc_1, Fc_2)$$

(אפיון A) קומוניקציה A

אפיון A
 אפיון B

$$\text{Hom}_C(c_1, c_2) \xrightarrow{F} \text{Hom}_D(Fc_1, Fc_2)$$



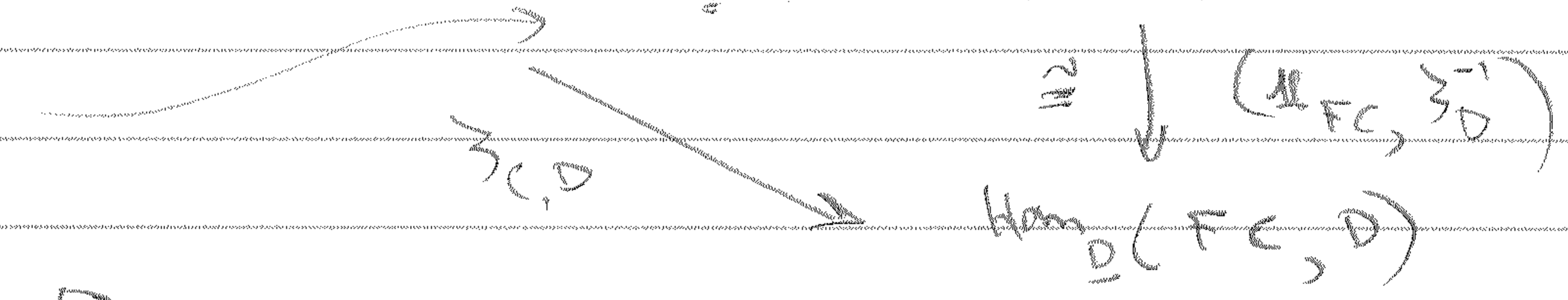
- A
- אפיון F (1) : פ'קציה
 - אפיון G (2)
 - אפיון F (3)

אפיון $F: C \rightarrow D$ מכל $A \rightarrow B$
 אפיון (F, G) של c ו d

$$D \ni d \rightarrow C \ni c \quad \text{אפיון } A \rightarrow B$$

$$\text{Hom}_C(c, Gd) \xrightarrow{F} \text{Hom}_D(Fc, FGD)$$

אפיון A



A

מרחב וקטורי B - A $F: M_A \rightarrow M_B$

פונקציה F מרחב וקטורי F G $F \in \text{Hom}(A, B)$

מרחב וקטורי $F^{-1}(0) = \{x \in A \mid F(x) = 0\}$ G F G F G

$(\psi \in \psi \circ \psi = 0, \psi: B \rightarrow M)$ $(\psi \in \psi \circ \psi = 0, \psi: N \rightarrow P)$

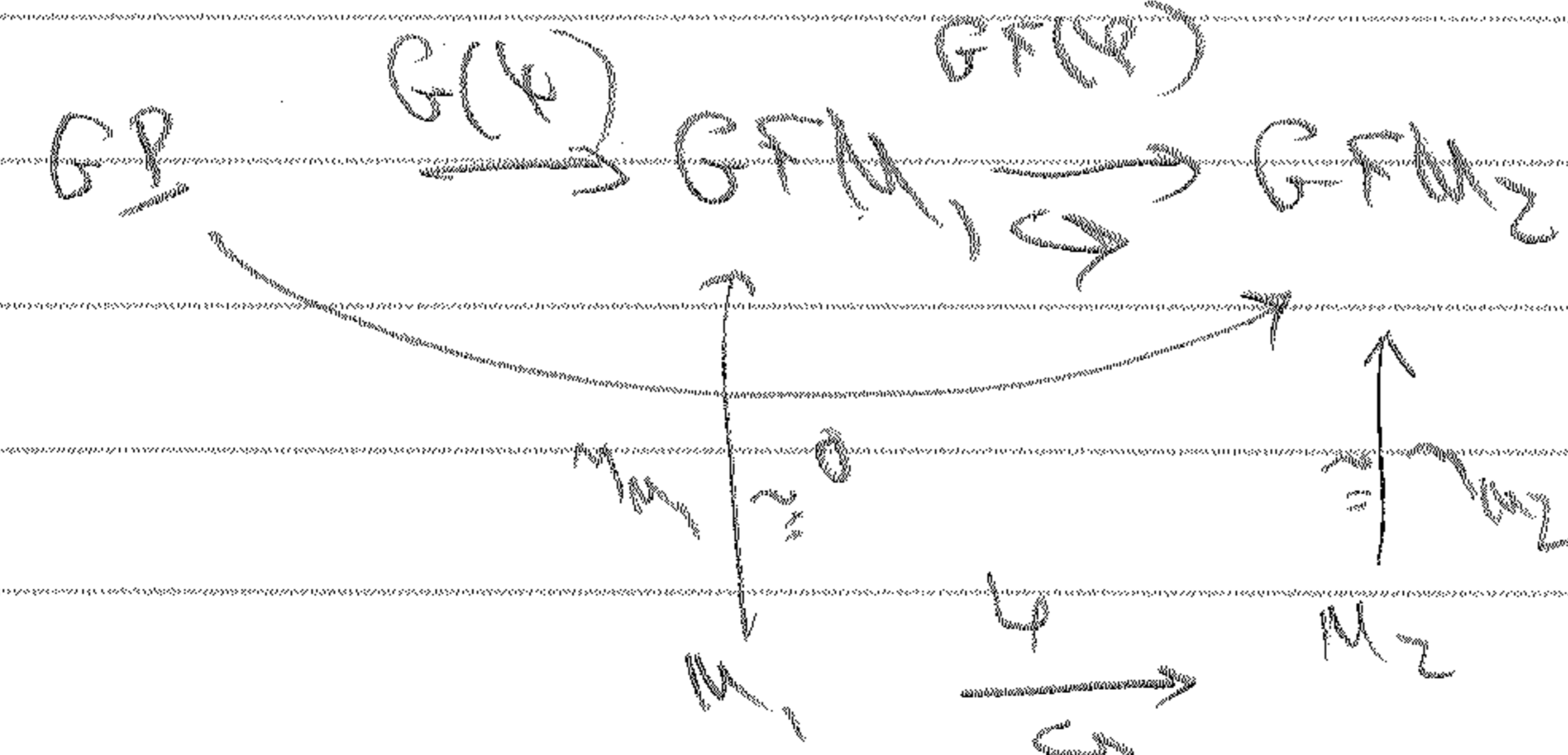
$(\psi \in \psi \circ \psi = 0, \psi: N \rightarrow P)$ $(\psi \in \psi \circ \psi = 0, \psi: N \rightarrow P)$

$P := \text{Ker}(\psi)$ $\psi: P \rightarrow M$ $\psi \circ \psi = 0$

$P := \text{Coker}(\psi)$ $\psi: N \rightarrow P$ $\psi \circ \psi = 0$

מרחב וקטורי $F: M_A \rightarrow M_B$ F F

$0 \rightarrow M_1 \xrightarrow{\psi} M_2$ $0 \rightarrow FM_1 \xrightarrow{F(\psi)} FM_2$ $\psi: P \rightarrow FM_1$

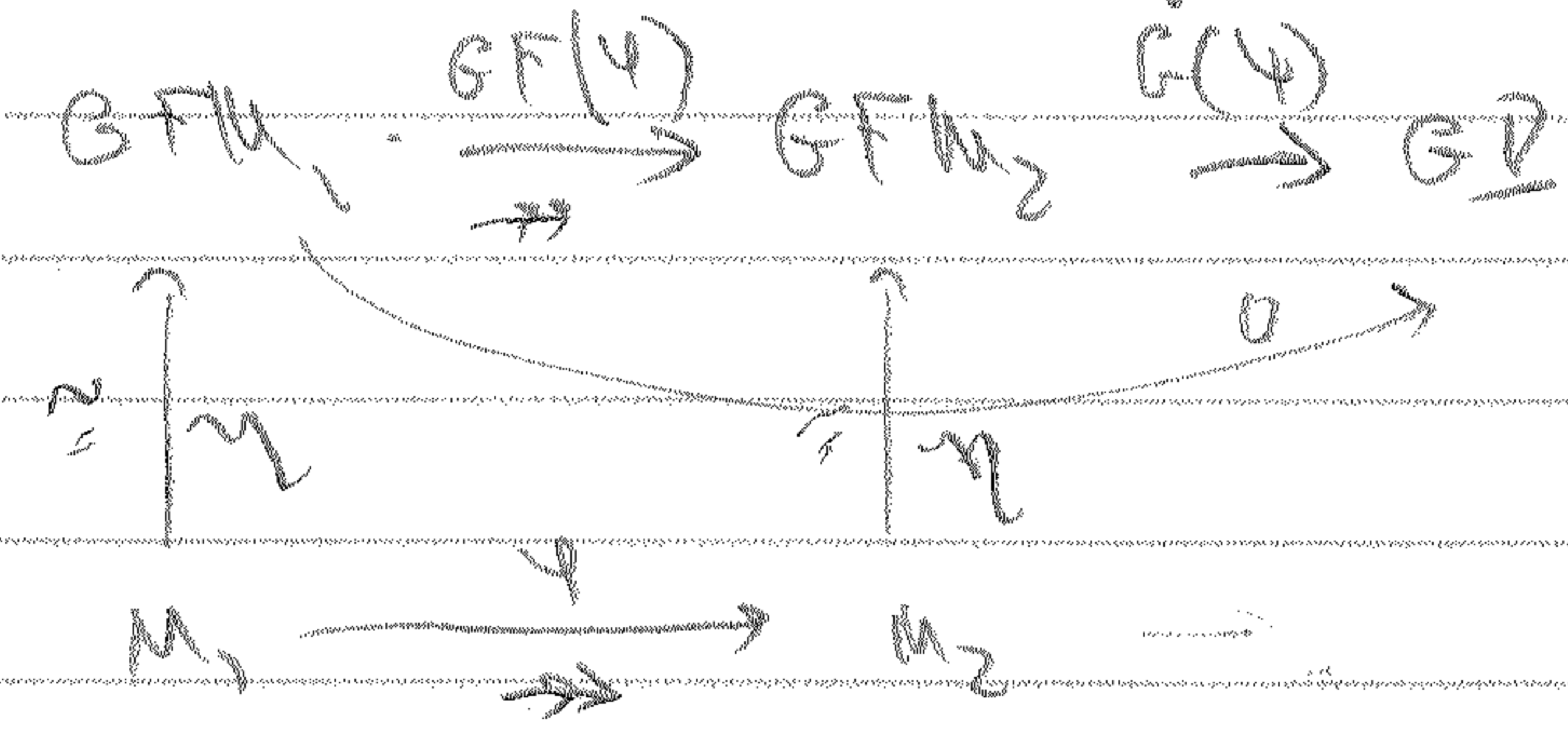


$G(\psi) = 0$ G ψ G ψ G ψ

$$M_1 \xrightarrow{\psi} M_2 \rightarrow D$$

$$FM_1 \xrightarrow{F(\psi)} FM_2 \rightarrow 0$$

$\psi \circ \psi = 0$ \Rightarrow $\psi = FM_2 \rightarrow D$
 \Rightarrow $\psi = 0 = \psi$

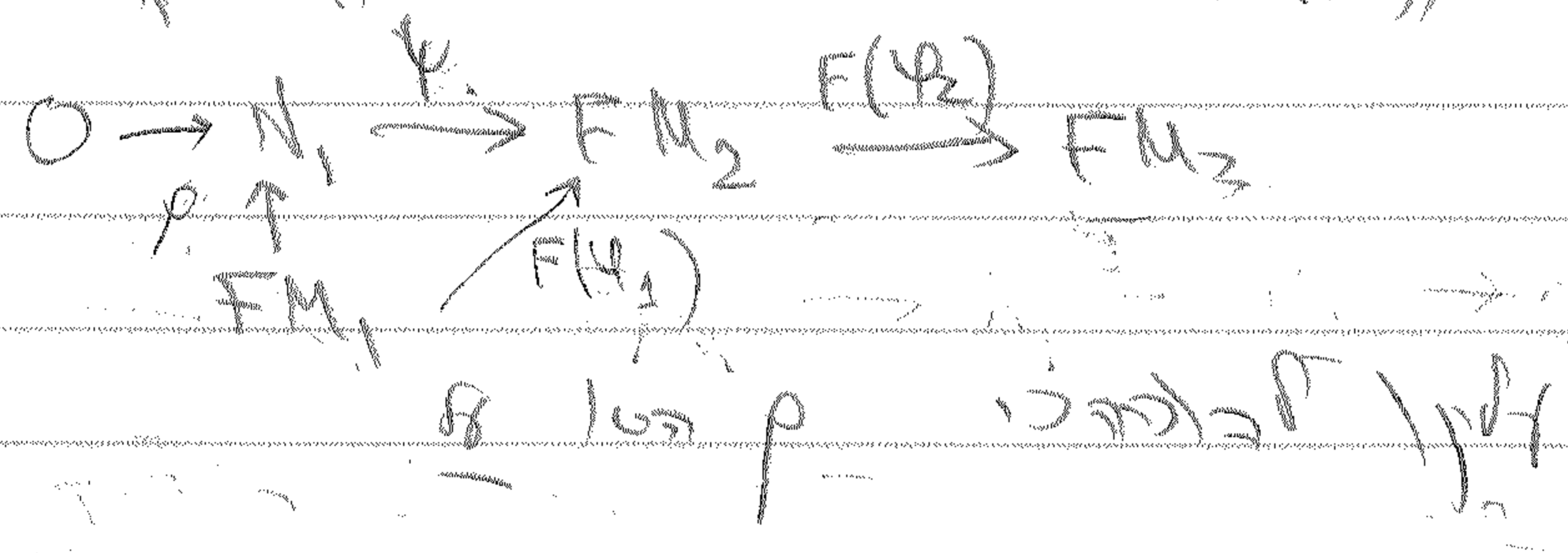


$\psi = \psi$ ρ $\psi = G(\psi)$ ρ

$$M_1 \xrightarrow{\psi_1} M_2 \xrightarrow{\psi_2} M_3$$

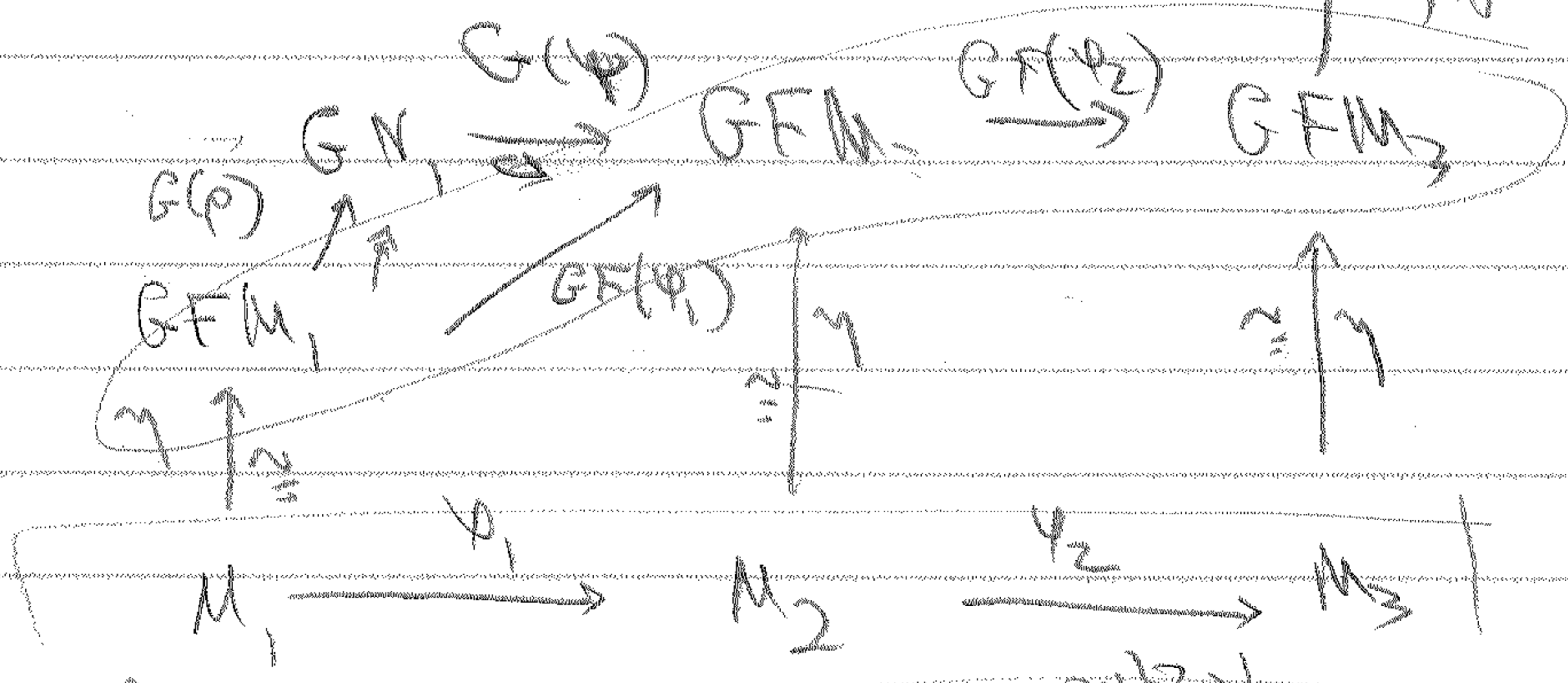
$$FM_1 \xrightarrow{F(\psi_1)} FM_2 \xrightarrow{F(\psi_2)} FM_3$$

$N = \text{Ker}(F(\psi_2))$



$\text{Ker}(G(\psi))$

$\text{Im}(G(\psi))$
 $\text{Ker}(GF(\psi_2))$
 $\text{Im}(GF(\psi_1))$



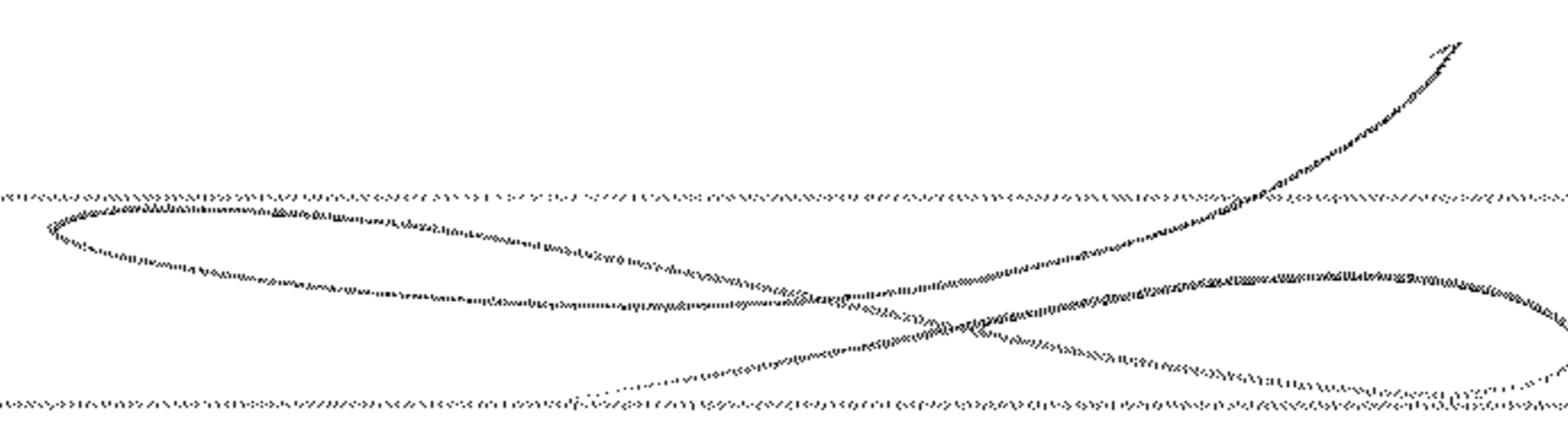
\cong

$f: F \text{ שבו } f \text{ ש } \beta(p): GFN_1 \rightarrow GFN_2, p \text{ פק}$

$$(FG)FN_1 \xrightarrow{EG(p)} FG N_2$$

$$\begin{matrix} \cong_{GFN_1} \uparrow \cong \\ FN_1 \end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix} \cong_{GFN_2} \uparrow \cong \\ N_2 \end{matrix}$$

\forall f p $פק$



ההקשר בין D ל- D^2 הוא $D^2 = D \circ D$

$$D: \underline{Mod} K \rightarrow (\underline{Mod} K)^{op}$$

$$DM := \text{Hom}_K(M, K)$$

(המשפט)

$$D^2: \underline{Mod} K \rightarrow \underline{Mod} K$$

$$\eta: \underline{Mod} K \rightarrow D^2$$

ההקשר בין M ל- DM הוא $DM = \text{Hom}_K(M, K)$

ההקשר בין M ל- DM הוא $DM = \text{Hom}_K(M, K)$

$$\eta_M: M \rightarrow D^2 M$$

$$D: \underline{Mod} K \rightarrow (\underline{Mod} K)^{op}$$

ההקשר בין M ל- DM הוא $DM = \text{Hom}_K(M, K)$

המשפט