(4)

פונקטורים אדיטיביים

הגדרה יהי $\mathbb{k}$ חוג קומוטטיבי, ותהיינה A ו- B שתי $\mathbb{k}$-אלגברות. פונקטור

$$F: \underline{\mathrm{Mod}}\, A \to \underline{\mathrm{Mod}}\, B$$

נקרא פונקטור $\mathbb{k}$-לינארי אם לכל זוג A-מודולים M_1, M_2 ההעתקה

$$F: \mathrm{Hom}_A(M_1, M_2) \to \mathrm{Hom}_B(FM_1, FM_2)$$

היא $\mathbb{k}$-לינארית. אם $\mathbb{k} = \mathbb{Z}$ אומרים כי F פונקטור אדיטיבי.

טענה יהי $\mathbb{k}$ חוג קומוטטיבי ו- A $\mathbb{k}$-אלגברה (למשל A קומוטטיבי). לכל זוג מודולים $\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2)$ הקבוצה היא $\mathbb{k}$-מודול. לכל שלושה מודולים, ההרכבה

$$\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2) \times \mathrm{Hom}_A(M_2, M_3) \to \mathrm{Hom}_A(M_1, M_3)$$

היא $\mathbb{k}$-בילינארית.

הוכחה לכל $\lambda \in \mathbb{k}$ ו- $\varphi: M_1 \to M_2$ נגדיר $(\lambda\varphi)(m) := \varphi(\lambda m) = \lambda\varphi(m)$, אז

$$(\lambda\varphi)(am) = \lambda\cdot\varphi(am) = \lambda a\cdot\varphi(m) = a\cdot\lambda\varphi(m) = a\cdot(\lambda\varphi)(m).$$

הבילינאריות ברורה.

יהי A חוג.

דוגמאות (1) תהי S קבוצה. נגדיר פונקטור

$$F: (\underline{\mathrm{Mod}}\, A)^{op} \to \underline{\mathrm{Mod}}\, A$$

ע"י

$$FM := \mathrm{Hom}_{Set}(S, M) = M^S$$

כלומר FM הוא אוסף הסדרות $\{m_s\}_{s\in S}$ ב- M המאונדקסות ע"י S.

ניקח שני מודולים M, N ו- $\varphi, \psi \in Hom_A(M, N)$

$F(\varphi) : FM \to FN$ ע"י. $FM \ni \{m_s\}_{s\in S}$

אז

$$F(\varphi)(\{m_s\}) = \{\varphi(m_s)\}_{s\in S}$$

בדומה

$$F(\psi)(\{m_s\}) = \{\psi(m_s)\}_{s\in S}$$

נראה כי

$$F(\varphi+\psi)(\{m_s\}) = \{(\varphi+\psi)(m_s)\}_{s\in S} = \{\varphi(m_s)\} + \{\psi(m_s)\} = F(\varphi)(\{m_s\}) + F(\psi)(\{m_s\})$$

לכן $F(\varphi) + F(\psi) = F(\varphi+\psi)$,

כלומר F פונקטור אדיטיבי.

2) יהי A חוג קומוטטיבי ו- N A-מודול.

לכל $M \in \underline{Mod\,A}$ נגדיר $FM := M \otimes_A N \in \underline{Mod\,A}$

ולהומו' $\varphi : M_1 \to M_2$ נגדיר

$$F(\varphi) : M_1 \otimes_A N \to M_2 \otimes_A N$$

ע"י

$$F(\varphi) := \varphi \otimes 1_N$$

הראו F פונקטור A-לינארי.

טענה יהי $F: \underline{\text{Mod}}\, A \to \underline{\text{Mod}}\, B$
פונקטור אדיטיבי. אזי F מכבד סכומים ישרים סופיים, כלומר

$$F\left(\bigoplus_{i=1}^{r} M_i\right) \cong \bigoplus_{i=1}^{r} FM_i$$

הוכחה לכל i יש העתקות $\varphi_i: M_i \to M$

ו- $\pi_i: M \to M_i$ $\prod_{i=1}^{r} M_i$

(כאשר $M = \bigoplus_{i=1}^{r} M_i$)

המקיימים $\pi_i \circ \varphi_i = 1\!\!1_{M_i}$

$$\sum_{i=1}^{r} \varphi_i \circ \pi_i = 1\!\!1_M .$$

נפעיל F ונקבל $F(\pi_i): FM \to FM_i$

$F(\varphi_i): FM_i \to FM$

ומקיים $F(\pi_i) \circ F(\varphi_i) = F(\pi_i \circ \varphi_i)$

$= F(1\!\!1_{M_i}) = 1\!\!1_{FM_i}$

ו- $\sum_{i=1}^{r} F(\varphi_i) \circ F(\pi_i) = \sum_i F(\varphi_i \circ \pi_i)$

$= F\left(\sum_i \varphi_i \circ \pi_i\right) = F(1\!\!1_M) = 1\!\!1_{FM}$

לכן $\bigoplus_{i=1}^{r} FM_i \xrightarrow{\oplus F(\varphi_i)} FM$

איזומורפיזם, עם הפכי $\prod F(\pi_i)$. ∎

פונקטורים מדויקים

הגדרה: יהי $F: \text{Mod}A \to \text{Mod}B$
פונקטור אדיטיבי:

(1) F נקרא פונקטור מדויק אם לכל
סדרה קצרה מדויקת
$$0\to M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3\to 0$$
ב- $\text{Mod}A$, הסדרה
$$0\to FM_1 \xrightarrow{F(\varphi_1)} FM_2 \xrightarrow{F(\varphi_2)} FM_3\to 0$$
היא מדויקת.

עד פה <
26.12

(2) F נקרא מדויק מימין אם לכל סדרה
מדויקת
$$M_1\to M_2\to M_3\to 0$$
ב- $\text{Mod}A$, הסדרה
$$FM_1\to FM_2\to FM_3\to 0$$
היא מדויקת.

(3) F נקרא מדויק משמאל אם לכל סדרה
מדויקת
$$0\to M_1\to M_2\to M_3$$
ב- $\text{Mod}A$, הסדרה
$$0\to FM_1\to FM_2\to FM_3$$
היא מדויקת.

דוגמאות

(1) תהי A חוג קומוטטיבי, נקח מודול N,
נגדיר $F: \underline{Mod}\,A \circlearrowleft$
ע"י
$$FM := M \otimes_A N$$

ידוע לנו שהפונקטור F הינו מדויק מימין.
הפונקטור F מדויק משמאל אם N מודול שטוח.

(2) יהי A חוג ו- G חבורה.
נגדיר $F: \underline{Mod}\,A \circlearrowleft$ ע"י
$FM := M^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, M)$. זה פונקטור
מדויק משמאל שאינו מדויק בדרך כלל מימין.

נשים לב שעבור G סופית, נקבל
$$FM \cong \mathbb{Z}^G \otimes_{\mathbb{Z}} M,$$
כאשר $\mathbb{Z}^G$ מודול חופשי (הוכח בשיעור).

פונקטור Hom: יהי A חוג ו- M A-מודול. נגדיר
פונקטור
$$F: \underline{Mod}\,A \to \underline{Ab}$$
ע"י $FN := \mathrm{Hom}_A(M,N)$ לאובייקטים,
ועבור מורפיזם $\varphi: N_1 \to N_2$ נגדיר
$$F(\varphi)(\psi) := \varphi \circ \psi$$
$$\psi \in \mathrm{Hom}_A(M, N_1)$$

אז F פונקטור מדויק משמאל.

(79)

הוכחה: נקבל סדרה מדויקת $0 \to N_1 \xrightarrow{\varphi_1} N_2 \xrightarrow{\varphi_2} N_3$

צ"ל: (i) $F(\varphi_1): FN_1 \to FN_2$ חח"ע

(ii) $Ker(F(\varphi_2)) = Im(F(\varphi_1)) \subset FN_2$.

(i): נניח $\psi \in FN_1$ כך ש- $F(\varphi_1)(\psi)=0$

כלומר $\psi \in Hom_A(M,N_1)$ ו- $\varphi_1 \circ \psi = 0$.

מאחר ש- φ_1 חח"ע נקבל כי $\psi = 0$.

(ii): מאחר ש- $\varphi_2 \circ \varphi_1 = 0$ ו- F פונקטור הרי

$$F(\varphi_2)F(\varphi_1) = F(\varphi_2 \circ \varphi_1) = F(0) = 0$$

לכן $Im(F(\varphi_1)) \subset Ker(F(\varphi_2))$

כעת נניח $\psi \in Ker(F(\varphi_2))$ אז $\psi \in Hom_A(M,N_2)$

ומתקיים $0 = F(\varphi_2)(\psi) = \varphi_2 \circ \psi$.

לכל $m \in M$ נקבל $\varphi_2(\psi(m)) = 0$

כלומר $\psi(m) \in Ker(\varphi_2) = Im(\varphi_1)$

לכן יש $n \in N_1$ יחיד כך ש- $\psi(m) = \varphi_1(n)$. נגדיר $\psi'(m) := n$.

נקבל פונקציה $\psi': M \to N_1$ המקיימת $\varphi_1 \circ \psi' = \psi$. מאחר ש- φ_1 הומו' חח"ע

כי ψ' הומומורפיזם, אז $\psi' \in Hom_A(M, N_1)$.

מ"ל

טרנספורמציות טבעיות

הגדרה יהיו $\underline{A}$ ו- $\underline{B}$ שתי קטגוריות ו- $F,G:\underline{A}\to\underline{B}$ שני פונקטורים.
טרנספורמציה טבעית η מ- F ל- G היא האוסף של מורפיזמים

$$\eta_A\in \mathrm{Hom}_{\underline{B}}(FA,GA)$$

לכל אובייקט $A\in Ob(\underline{A})$, כך שלכל מורפיזם

$$f\in \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A_1,A_2)$$

מתקיים

$$\eta_{A_2}\circ F(f)=G(f)\circ\eta_{A_1}$$

כלומר הדיאגרמה

$$\begin{tikzcd} FA_1 \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_{A_1}"'] & FA_2 \arrow[d, "\eta_{A_2}"] \\ GA_1 \arrow[r, "G(f)"] & GA_2 \end{tikzcd}$$

קומוטטיבית

הגדרה איזומורפיזם טבעי בין שני פונקטורים $F,G:\underline{A}\to\underline{B}$
הוא טרנספורמציה טבעית $\eta:F\to G$ כך ש- $\eta_A:FA\to GA$ הוא איזומורפיזם לכל אובייקט A

- טרנספורמציה טבעית
- סימון קטגוריות
- עולה

טענה: יחס האיזומורפיזם הטבעי הוא יחס שקילות על מחלקת הפונקטורים $A \to B$

הוכחה: א) זהות $1_{FA}: FA \xrightarrow{\cong} FA$

ב) אם $\eta: F \xrightarrow{\cong} G$ ו- $\zeta: G \xrightarrow{\cong} H$ איזו
נגדיר $\zeta \circ \eta: F \xrightarrow{\cong} H$ ע"י
$(\zeta \circ \eta)_A := \zeta_A \circ \eta_A : FA \xrightarrow{\cong} HA$

$\eta_A: FA \to GA \xrightarrow{\zeta_A} HA$

ג) נגדיר $\eta^{-1}: G \xrightarrow{\cong} F$ ע"י
$\eta^{-1}_A := (\eta_A)^{-1}: GA \to FA$. מ.ש.ל

דוגמה: יהי A חוג. נגדיר
$F, G : \underline{M.A} \to \underline{M.A}$ ע"י $FM := M^2$
ו-
$GM := \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} M$

נגדיר $\eta_M: FM \xrightarrow{\cong} GM$ ע"י
$\eta_M(m_1, m_2) := \vec{e}_1 \otimes m_1 + \vec{e}_2 \otimes m_2$
כאשר $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in \mathbb{Z}^2$ וקטורי הבסיס.

דוגמא: נתון הומו' של חוגים (קומוטטיביים)
(זכור הפקטור) $A \to B$
יש זוג של פונקטורים

$$F: \underline{\mathrm{Mod}}\,B \to \underline{\mathrm{Mod}}\,A$$

הפונקטור השכחה, ו-

$$G: \underline{\mathrm{Mod}}\,A \to \underline{\mathrm{Mod}}\,B$$

פונקטור הרחבת הסקלרים

$$GM := B \otimes_A M$$

נגדיר טרנספורמציה טבעית $\eta: \mathbb{1}_{\mathrm{Mod}\,A} \to FG$

ע"י $\eta_M: M \to FGM = B \otimes_A M$, $\eta_M(m) := 1 \otimes m$

באופן דומה נגדיר טרנספורמציה $\xi: \mathbb{1}_{\mathrm{Mod}\,B} \leftarrow GF$

ע"י $\xi_N: N \leftarrow GFN = B \otimes_A N$

$$\xi_N(b \otimes n) := bn$$

מקבלים פונקציות מוגדרות

בר. 27.12

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Mod}}\,A}(M, FN) \xrightarrow{\xi} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\,B}(GM, N)$$

$$\psi \mapsto \left(GM \xrightarrow{G(\psi)} GFN \xrightarrow{\xi_N} N \right)$$

$$\left(M \xrightarrow{\eta_M} FGM \xrightarrow{F(\phi)} FN \right) \xleftarrow{\eta} \phi$$

שהן הופכיות זו לזו אלו איזומורפיזמים

הם טבעיים

נניח ש $\alpha: M_2 \to M_1$ ב $\underline{\mathrm{Mod}}\,A$ ו- $\beta: N_1 \to N_2$ ב $\underline{\mathrm{Mod}}\,B$, הרי

ל דיאגרמה קומוטטיבית :

$$\begin{tikzcd} \varphi \in \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Mod}}\,A}(M_1, FN_2) \arrow[r, "\bar{\xi}"] \arrow[d, "{(\alpha, F(\beta))}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Mod}}\,B}(GM_1, N_1) \arrow[d, "{(G(\alpha), \beta)}"] \\ \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Mod}}\,A}(M_2, FN_2) \arrow[r, "\bar{\xi}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathrm{Mod}}\,B}(GM_2, N_2) \end{tikzcd}$$

$\varphi \mapsto$

$F(\beta)\circ\varphi\circ\alpha \mapsto$

$$\xi_{N_2}\circ G(F(\beta)\circ\varphi\circ\alpha) \overset{?}{=} \beta\circ(\xi_{N_1}\circ G(\varphi))\circ G(\alpha)$$

$\xi_{N_1}\circ G(\varphi)$

כי:

$$\xi_{N_2}\circ G(F(\beta)\circ\varphi\circ\alpha)$$
$$= \underbrace{\xi_{N_2}\circ GF(\beta)}\circ G(\varphi)\circ G(\alpha)$$
$$= \underbrace{\beta\circ\xi_{N_1}}\circ G(\varphi)\circ G(\alpha)$$

הגדרה כללית יותר:

הגדרה: יהיו $\underline{A}$ ו- $\underline{B}$ שתי קטגוריות
יהיו $F:\underline{A}\to\underline{B}$ ו- $G:\underline{B}\to\underline{A}$
שני פונקטורים, הזוג (F,G) נקרא זוג פונקטורים
צמודים אם קיים טרנספורמציה טבעית (לא הפיכה)
(adjunction)

$$\xi : FG \to 1_{\underline{B}}$$

כך שלכל $M\in\underline{A}$ ו- $N\in\underline{B}$:

$$\bar{\xi}_{M,N}: \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(M, GN) \to \mathrm{Hom}_{\underline{B}}(FM, N) \quad \text{המוגדרת}$$
$$\varphi \mapsto \xi_N\circ F(\varphi)$$

הוא איזומורפיזם

הערה

את הטרנספורמציה הטבעית $\eta: 1_{\underline{A}} \to GF$

מקבלים כך: עבור $M \in \underline{A}$

ניקח את המורפיזם $1_{FM} \in Hom_{\underline{B}}(FM, FM)$

ע"י $\xi_{M,FM}$ נקבל

$$\eta_M := \xi^{-1}_{M,FM}(1_{FM}) \in Hom_{\underline{A}}(M, GFM)$$ (היחידה)

דוגמה: נתון הפונקטור השוכח

$F: \underline{Mod\ A} \to \underline{Set}$

והפונקטור המודול החופשי $G: \underline{Set} \to \underline{Mod\ A}$

אלו פונקטורים צמודים: ע"י

טרנספורמציה טבעית $\eta: 1_{\underline{Set}} \to FG$

ע"י $\eta_S: S \to FGS$

$s \mapsto \delta_s$ (פונקציית הדלתא)

ההעתקה: איזומורפיזם

$$\xi_{S,M}: Hom_{\underline{Mod\ A}}(GS, M) \xrightarrow{\cong} Hom_{\underline{Set}}(S, FM)$$

$$\varphi \longmapsto F(\varphi) \circ \eta_S$$

שקילות

הגדרה: קטגוריות $\underline{C}$ ו- $\underline{D}$ הן קטגוריות שקולות אם קיימים פונקטורים $F: \underline{C} \to \underline{D}$ ו- $G: \underline{D} \to \underline{C}$

כך שיש איזומורפיזמים טבעיים $GF \cong 1_{\underline{C}}$ ו- $FG \cong 1_{\underline{D}}$

85

תרג' 1

יהי $D := Set_f$ הקטגוריה של הקבוצות הסופיות, ותהי C תת-הקטגוריה המלאה כך ש

$$Ob(C) = \{ \{1,2,\dots,n\} \mid n \in \mathbb{N} \}$$

יהי $F: C \to Set_f = D$ הפנקטור הכלה. עבור כל קבוצה סופית S נבחר איזומורפיזם נתון $f_S: S \xrightarrow{\cong} \{1,\dots,n\}$, כאשר $n = \#S$, וכך ש- $f_S = 1_S$ אם $S \in C$.

[הערה: כאן היינו צריכים גרסה חזקה של אקסיומת הבחירה, כיון שאנחנו צריכים לבחור בבת אחת [illegible] הקבוצות, אז אפשר לקחת את D להיות איזומורפית לתת-קטגוריה קטנה מלאה של Set_f, המכילה את C, אז f קיים לפי אקסיומת הבחירה הרגילה]

נגדיר פונקטור $G: D \to C$ כך:
עבור קבוצה S נגדיר את $GS := \{1,\dots,n\}$. עבור פונקציה $g: S \to T$
נגדיר $G(g): GS \to GT$
ע"י

$$G(g) = f_T \circ g \circ f_S^{-1}$$

תרגיל (1) להראות ש-G פונקטור
(2) להראות ש-η איזומורפיזם טבעי

כעת ברור $GF = 1_C$

נגדיר $\eta: FG \xrightarrow{\cong} 1_D$ ע"י

$$\eta_S := f_S^{-1}: FGS = \{1,\dots,n\} \xrightarrow{\cong} S$$

דוגמה

יהי K שדה. נגדיר שתי קטגוריות:
$D = Mod_f K$: קטגוריית המרחבים הוקטוריים סופיי הממד מעל K.
C : תת-הקטגוריה המלאה של D עם האובייקטים $\{K^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

(86)

$\underline{B}$: הקטגוריה הבאה המוגדרת :

$Ob(\underline{B}) := \mathbb{N}$

$Hom_{\underline{B}}(n,m) := M_{m\times n}(K)$ ← מטריצות $m\times n$ בגודל

כלל ההרכבה : כפל מטריצות

$$Hom_{\underline{B}}(n,m) \times Hom_{\underline{B}}(m,l) \to Hom_{\underline{B}}(n,l)$$
$$g \quad\quad h \quad \mapsto \quad hg$$

ג) להראות ש- $\underline{B} \cong \underline{C}$ (איזומורפיזם של קטגוריות, צריך פונקטור $F:\underline{B}\to\underline{C}$ שהוא איזומורפיזם של אובייקטים ושל מורפיזמים)

ד) להראות ש- $\underline{C} \simeq \underline{D}$ (שקילות של קטגוריות)

(רמז: כמו בתרגיל הקודם, אבל צריך שנבחר דרך אחת לבחור בסיס לכל אובייקט V ב- $Mod_{fg}K$)

עד פה 2.1.06

[illegible]: שפונקטור $F:\underline{C}\to\underline{D}$ הוא שקילות אם קיים $G:\underline{D}\to\underline{C}$ כך שהזוג (F,G) מהווה שקילות. G יקרא קוואזי-הפכי של F

~~משפט: יהי K חוג קומוטטיבי, ותהיינה A ו-~~
~~B שתי K-אלגברות. יהי $F: Mod\,A \to Mod\,B$~~
~~פונקטור K-לינארי, ונניח $G: Mod\,B \to Mod\,A$~~
~~פונקטור כך שהזוג (F,G) מהווה שקילות~~
~~① אז G פונקטור K-לינארי.~~
~~② F ו- G אקזקטים~~
~~③ F ו- G אדיונקטים~~

טענה (1) נניח $F : \underline{C} \to \underline{D}$ הוא שקילות

אז לכל $c_1, c_2 \in \underline{C}$ ההעתקה

$$F : \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(c_1, c_2) \to \mathrm{Hom}_{\underline{D}}(Fc_1, Fc_2)$$

הנ"ל איזומורפיזם (של קבוצות)

נניח $\eta : 1_{\underline{C}} \xrightarrow{\cong} GF$ ו- $\xi : 1_{\underline{D}} \xrightarrow{\cong} FG$ איזומורפיזמים טבעיים.

הוכחה:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(c_1, c_2) \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "\cong"', "(\eta_{c_1}^{-1}, \eta_{c_2})"'] & \mathrm{Hom}_{\underline{D}}(Fc_1, Fc_2) \arrow[d, "G"] \arrow[ddr, bend left, "\cong", "(\xi_{Fc_1}^{-1}, \xi_{Fc_2})"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\underline{C}}(GFc_1, GFc_2) \arrow[dr, "F"] & \\
& & \mathrm{Hom}_{\underline{D}}(FGFc_1, FGFc_2)
\end{tikzcd}$$

מסיקים: (1) F חח"ע.

(2) G חח"ע.

(3) F על.

∎

טענה (2) נניח $F : \underline{C} \to \underline{D}$ שקילות, עם הופכי G. אז (F, G) זוג צמוד.

הוכחה. נקח $c \in \underline{C}$ ו- $D \in \underline{D}$. אז

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(c, GD) \arrow[r, "F", "\cong"'] \arrow[dr, "\xi_{c,D}"'] & \mathrm{Hom}_{\underline{D}}(Fc, FGD) \arrow[d, "\cong"', "(1_{Fc}, \xi_D^{-1})"] \\
& \mathrm{Hom}_{\underline{D}}(Fc, D)
\end{tikzcd}$$

לפי טענה (1)

∎

(48)

משפט: יהיו A ו- B חוגים
$F: Mod\,A \to Mod\,B$ שקילות קטגוריות
(כלומר F שקילות, (קיים) פונקטור הפוך -)
טענה 3 יהי G הפונקטור ההפוך של F. אז G שקילות קטגוריות
הוכחה: מהגדרה 6 ו- ①: $G = (\,)^{-1}\circ F^{-1}$, וכיוון ההגדרה
טענה 4 יהי $\varphi: M \to N$ הומו' ב- $Mod\,A$

① φ חח"ע אמ"מ (לכל $\psi: P \to M$, $\varphi\circ\psi = 0 \Rightarrow \psi = 0$)

② φ על אמ"מ (לכל $\psi: N \to P$, $\psi\circ\varphi = 0 \Rightarrow \psi = 0$)

הוכחה

① נניח φ לא חח"ע. ניקח $P := Ker(\varphi)$
ו- $\psi: P \to M$ השיכון. אז $\psi \neq 0$ אבל $\varphi\circ\psi = 0$

② נניח φ לא על. ניקח $P := Coker(\varphi)$
ו- $\psi: N \to P$ ההטלה. אז $\psi \neq 0$ אבל
$\psi\circ\varphi = 0$
∎

משפט 5 תהי $F: Mod\,A \to Mod\,B$ שקילות קטגוריות
אז F פונקטור מדויק.

הוכחה

① נניח $0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2$ מדויקת ונראה
כי $0 \to FM_1 \xrightarrow{F(\varphi)} FM_2$ מדויקת. ניקח
$\psi: P \to FM_1$ כך ש- $F(\varphi)\circ\psi = 0$. נראה $\psi = 0$.
נפעיל G:

$$\begin{tikzcd}
GP \arrow[r, "G(\psi)"] \arrow[rr, bend right] & GFM_1 \arrow[r, "GF(\varphi)"] & GFM_2 \\
& M_1 \arrow[u, "\eta_{M_1}", "\cong"'] \arrow[r, "\varphi"] & M_2 \arrow[u, "\eta_{M_2}"', "\cong"]
\end{tikzcd}$$

אבל אז $G(\psi) = 0$.
בגלל G אדיטיבי
ולפי (טענה 1 סעיף 1
ו- ③). לכן $\psi = 0$.

א) עתה נראה כי $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \to 0$ אקזקטית גוררת כי

$$FM_1 \xrightarrow{F(\varphi)} FM_2 \to 0$$

נניח $\psi : FM_2 \to D$ אפימורפיזם כך ש- $\psi \circ \varphi = 0$

צ"ל $\psi = 0$. נפעיל G:

$$\begin{tikzcd}
GFM_1 \arrow[r, two heads, "GF(\psi)"] \arrow[rr, bend right, "0"] & GFM_2 \arrow[r, "G(\psi)"] & GD \\
M_1 \arrow[u, "\eta", "\cong"'] \arrow[r, two heads, "\psi"] & M_2 \arrow[u, "\eta", "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

מכאן $G(\psi) = 0$. לכן $\psi = 0$.

ב) נניח $M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_3$ אקזקטית

נראה כי $FM_1 \xrightarrow{F(\varphi_1)} FM_2 \xrightarrow{F(\varphi_2)} FM_3$ אקזקטית

נסמן $N := Ker(F(\varphi_2))$. לפי התכונה האוניברסלית של הגרעין קיים ρ ומ-(א) מספיק להראות:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "\psi"] & FM_2 \arrow[r, "F(\varphi_2)"] & FM_3 \\
& FM_1 \arrow[u, "\rho"] \arrow[ur, "F(\varphi_1)"'] & &
\end{tikzcd}$$

צריך להראות כי ρ הוא על

$G(\psi)$ חח"ע. לכן:

$Im(G(\psi))$

$\cap$

$Ker(GF(\varphi_2))$

$=$

$Im(GF(\varphi_1))$

$\Downarrow$

$G(\rho)$ הוא על

$$\begin{tikzcd}
& GN_1 \arrow[r, "G(\psi)"] & GFM_2 \arrow[r, "GF(\varphi_2)"] & GFM_3 \\
& GFM_1 \arrow[u, "G(\rho)"] \arrow[ur, "GF(\varphi_1)"'] & & \\
& M_1 \arrow[u, "\eta", "\cong"'] \arrow[r, "\varphi_1"] & M_2 \arrow[uu, "\eta", "\cong"'] \arrow[r, "\varphi_2"] & M_3 \arrow[uu, "\eta", "\cong"']
\end{tikzcd}$$

אקזקטי

אקזקטי

אם כן $G_1(\rho): GFM_1 \to GN_1$ אז נפעיל F:

$$\begin{tikzcd}
(FG)FM_1 \arrow[r, "FG(\rho)"] & FGN_1 \\
FM_1 \arrow[u, "\xi_{FM_1}", "\cong"'] \arrow[r, "\rho"] & N_1 \arrow[u, "\cong", "\xi_{N_1}"']
\end{tikzcd}$$

מקבלים ρ זה

תרגיל: יהי K חוג קומוטטיבי כלשהו. נגדיר

$$D: \underline{Mod}\,K \to (\underline{Mod}\,K)^{op}$$

ע"י $DM := Hom_K(M, K)$ (המודול הדואלי).

$$D^2 := D \circ D$$

ההרכבה הינו פונקטור $D^2: \underline{Mod}\,K \circlearrowleft$

(1) הראו שיש טרנספורמציה טבעית $\eta: 1_{\underline{Mod}\,K} \to D^2$ על ידי ההגדרה הבאה: אם M הינו K-מודול קבוע, נגדיר $\eta_M: M \to D^2M$ קנונית.

(2) הראו: אם K שדה אזי $D: \underline{Mod}_f K \to (\underline{Mod}_f K)^{op}$ הוא שקילות קטגוריות. (כל המרחבים הוקטוריים) סוף

31.06

(אורי וסף)