אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

פרופ' אמנון יקותיאלי
המחלקה למתמטיקה
טלפון: 08-6477856
פקס: 08-6477648

Prof. Amnon Yekutieli
Department of Mathematics
Phone: +972-8-6477856
Fax: +972-8-6477648
Email: amyekut@math.bgu.ac.il

17.1.07

עבודת גמר בקורס "מבוא לגיאומטריה אלגברית"

הנחיות: נא לעבוד לבד. ניתן לפנות אלי בשאלות הבהרה, וכן ניתן להעזר בספרות (למשל ב־Hartshorne). מועד ההגשה: 25.2.07.

להלן $\mathbb{k}$ הוא שדה סגור אלגברית. יהי X עקום חלק מעל $\mathbb{k}$, כלומר יריעה אלגברית לא־סינגולרית אי־פריקה ממימד 1. נסמן ב־ K את שדה הפונקציות הרציונליות של X וב־ $K^{\times}$ את החבורה הכפלית, כלומר $K^{\times} = K - \{0\}$.

בהנתן נקודה $x \in X$ החוג המקומי $\mathcal{O}_{X,x}$ הוא תחום הערכה דיסקרטית (DVR), ונסמן ב־

$$v_x : K^{\times} \to \mathbb{Z}$$

את ההערכה המתאימה. ז"א

$$\mathcal{O}_{X,x} = \{f \in K^{\times} \mid v_x(f) \geq 0\} \cup \{0\} .$$

נגדיר את **חבורת המחלקים** $\operatorname{div}(X)$ של X להיות החבורה האבלית החופשית על הנקודות של X. מחלק הוא אם כן סכום פורמלי סופי $D = \sum_{x \in X} n_x x$ עם מקדמים שלמים n_x. **המעלה** של מחלק $D = \sum_{x \in X} n_x x$ היא

$$\deg(D) := \sum_{x \in X} n_x \in \mathbb{Z} .$$

יהי $E = \sum_{x \in X} m_x x$ מחלק אחר. כותבים $E \geq D$ אם $m_x \geq n_x$ לכל נקודה x. זהו סדר חלקי על $\operatorname{div}(X)$. D נקרא **מחלק אפקטיבי** אם $D \geq 0$, כלומר אם $n_x \geq 0$ לכל x.

1. תהי $f \in K^{\times}$. הוכח כי הקבוצה $\{x \in X \mid v_x(f) \neq 0\}$ היא סופית.

בהנתן $f \in K^{\times}$ המחלק של f הוא

$$(f) := \sum_{x \in X} v_x(f) x \in \operatorname{div}(X) .$$

מחלק כזה נקרא **מחלק ראשי**.

2. הוכח כי המחלקים הראשיים מהווים תת חבורה של $\operatorname{div}(X)$.

חבורת המנה

$$\operatorname{Pic}(X) := \frac{\operatorname{div}(X)}{\{\text{מחלקים ראשיים}\}}$$

נקראת **חבורת פיקאר** של X. זוהי שמורה (אינווריאנטה) חשובה ביותר.

3. חשב את $\operatorname{Pic}(\mathbf{A}^1)$, כאשר $\mathbf{A}^1$ הוא הישר האפיני.

מכאן ואילך $X := \mathbf{P}^1$, הישר הפרוייקטיבי. חוג הקואורדינטות ההומוגניות הוא $\Bbbk[t_0, t_1]$. הנקודה באינסוף היא $x_\infty := (0 : 1)$. נגדיר

$$U_0 := \{t_0 \neq 0\} = \mathbf{P}^1 - \{x_\infty\} \subset \mathbf{P}^1$$

ו־ $t := t_1/t_0$. אז $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(U_0) = \Bbbk[t]$ ושדה הפונקציות הרציונליות הוא $K = \Bbbk(t)$.

4. תהי $f \in K^\times = \Bbbk(t)^\times$ ויהי $D := (f)$. הוכח כי $\deg(D) = 0$. הסק שיש הומומורפיזם מושרה

$$\deg : \operatorname{Pic}(\mathbf{P}^1) \to \mathbb{Z} \ .$$

5. יהי D מחלק אפקטיבי על $\mathbf{P}^1$ ממעלה d. הוכח שיש פונקציה רציונלית f כך ש־ $(f) = D - dx_\infty$.

6. הוכח כי $\operatorname{Pic}(\mathbf{P}^1) \cong \mathbb{Z}$.

בהנתן מחלק D נגדיר

$$L(D) := \{f \in K^\times \mid (f) \geq -D\} \cup \{0\} \subset K \ .$$

$L(D)$ נקרא **המערכת הליניארית** של D.

7. יהי D מחלק כלשהו. הוכח כי $L(D)$ הוא תת $\Bbbk$־מודול של K.

8. יהי D מחלק ממעלה 0. הוכח כי $\operatorname{rank}_\Bbbk L(D) = 1$. (רמז: הראה שיש פונקציה $f \in L(D)$, $f \neq 0$; וכי f יחידה עד כדי כפל בקבוע.)

9. יהי D מחלק ממעלה 1. הוכח כי $\operatorname{rank}_\Bbbk L(D) = 2$. (רמז: תחילה הראה כי $L(x_\infty) = \Bbbk \oplus \Bbbk t$. עבור D כללי מצא f כך ש־ $(f) = D - x_\infty$, והוכח שהכלל $g \mapsto gf$ הינו איזומורפיזם $\Bbbk$־ליניארי $L(D) \xrightarrow{\cong} L(x_\infty)$.)

אנו יודעים שהחבורה

$$\operatorname{PGL}_2(\Bbbk) := \frac{\operatorname{GL}_2(\Bbbk)}{\Bbbk^\times}$$

פועלת על $\mathbf{P}^1$ באוטומורפיזמים של יריעות. עבור מטריצה $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{0,0} & \sigma_{0,1} \\ \sigma_{1,0} & \sigma_{1,1} \end{bmatrix} \in \operatorname{GL}_2(\Bbbk)$ ונקודה $x = (a_0 : a_1) \in \mathbf{P}^1$ הנוסחה היא

$$\sigma(x) = (\sigma_{0,0}a_0 + \sigma_{0,1}a_1 : \sigma_{1,0}a_0 + \sigma_{1,1}a_1) \ .$$

10. הוכח כי הפעולה של $\operatorname{PGL}_2(\Bbbk)$ על השדה K היא

$$\sigma^*(t) = \frac{\sigma_{1,0} + \sigma_{1,1}t}{\sigma_{0,0} + \sigma_{0,1}t} \ .$$

11. נניח $\sigma : \mathbf{P}^1 \to \mathbf{P}^1$ אוטומורפיזם של יריעות. הוכח ש־ σ מושרית ע״י מטריצה ב־ $\operatorname{GL}_2(\Bbbk)$. (רמז: התבונן בנקודה $y := \sigma^{-1}(x_\infty)$. ע״פ שאלה 8 יש פונקציה $f \in L(x_\infty - y)$, $f \neq 0$. הראה ש־

$$\widetilde{\sigma} : L(x_\infty) \xrightarrow{\sigma^*} L(y) \xrightarrow{\text{כפל ב־ } f} L(x_\infty)$$

הוא איזומורפיזם $\Bbbk$־ליניארי. חשב את המטריצה של $\widetilde{\sigma}$ ביחס לבסיס $(1, t)$ של $L(x_\infty)$.)

12. תהי $\operatorname{Aut}(\mathbf{P}^1)$ חבורת האוטומורפיזמים של $\mathbf{P}^1$ בקטגורית היריעות מעל $\Bbbk$. הוכח ש־

$$\operatorname{Aut}(\mathbf{P}^1) \cong \operatorname{PGL}_2(\Bbbk) \ .$$

בהצלחה!