BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

המחלקה למתמטיקה

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית

תאריך הבחינה: 22.1.07
שם המורה: פרופ' אמנון יקותיאלי
מס' קורס 201-1-9041
שנה: תשס"ז 2006/7 סמסטר: א' מועד: א'
משך הבחינה: 2 שעות
חומר עזר: מחשבון פשוט [השאלון לפרסום]

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

1. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{Q}$ והמרחבים הוקטוריים הם $V := \mathbb{Q}^3$ ו- $W := \mathbb{Q}^2$. נתונים הוקטורים

$$v_1 := \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ v_2 := \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix},\ w_1 := \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix},\ w_2 := \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}.$$

א. האם יש טרנספורמציה ליניארית $T : V \to W$ כך ש- $v_1, v_2 \in \operatorname{Ker}(T)$ ו- $w_1, w_2 \in \operatorname{Im}(T)$? אם כן תן דוגמה (רשום את המטריצה של T ביחס לבסיסים הסטנדרטיים); אם לא הוכח זאת.

ב. האם יש טרנספורמציה ליניארית $S : W \to V$ כך ש- $S(w_1) = v_1$ ו- $S(w_2) = v_2$? אם כן תן דוגמה (רשום את המטריצה של S ביחס לבסיסים הסטנדרטיים); אם לא הוכח זאת.

2. נתונה מערכת משוואות

$$\begin{aligned}(\lambda+2)x_1 + 6x_2 + (\lambda+2)x_3 &= 8\\ (\lambda+1)x_2 + (\lambda+1)x_3 &= 2\\ 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 8\end{aligned}$$

בשלושה משתנים מעל השדה $\mathbb{R}$, התלויה בפרמטר λ. עבור כל ערך של λ מצא האם למערכת אין פתרון; יש פתרון יחיד; או שיש אינסוף פתרונות. לנמק!

3. בשאלה זו השדה הוא $\mathbb{R}$,

$$V := \{\ f(x) \text{ פולינומים } \text{ ממעלה } \le 2 \text{ עם מקדמים ב- } \mathbb{R}\ \}\ ,$$

ו- $W := \mathbb{R}^3$. נגדיר פונקציה $T : V \to W$ ע"י הנוסחה

$$T(f(x)) := \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \end{bmatrix}\ .$$

כמו כן נגדיר פונקציה $S : V \to V$ ע"י הנוסחה $S(f(x)) := f(2x)$.

א. בדוק כי T ו- S טרנספורמציות ליניאריות.

ב. מצא את המטריצות $[T]^{\mathbf{v}}_{\mathbf{e}}$ ו- $[S]^{\mathbf{v}}_{\mathbf{v}}$ המייצגות את T ו- S ביחס לבסיס $\mathbf{v} := (1, x, x^2)$ ולבסיס הסטנדרטי $\mathbf{e} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_2)$.

ג. מצא בסיסים של הגרעין והתמונה של הטרנספורמציה $T \circ S - 2T$.

4. נתון אופרטור ליניארי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ מעל השדה $\mathbb{R}$ המקיים

$$T(\vec{e}_1) = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix},\ T(\vec{e}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}\ .$$

כאן $\mathbf{e} := (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ הוא הבסיס הסטנדרטי.

א. מצא את הפולינום האופייני $p_T(x)$.

ב. לכסן את T; כלומר מצא בסיס $\mathbf{w}$ של $\mathbb{R}^2$ כך שהמטריצה $[T]^{\mathbf{w}}_{\mathbf{w}}$ היא אלכסונית.

ג. הראה שהאופרטור $T - I$ הפיך (I הוא אופרטור הזהות).

ד. חשב את המטריצה המייצגת את האופרטור $T^{100} \circ (T - I)^{-10}$ ביחס לבסיס $\mathbf{e}$.

5. פתור את המשוואה

$$X^2 + 3I = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ 11 & -4 \end{bmatrix}$$

כאשר X הוא משתנה המקבל ערכים ב- $\mathrm{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ו- I היא מטריצת היחידה.

בהצלחה!