

בחינת גמר בקורס מבוא לאלגברה ליניארית

תאריך הבחינה: 13.2.07

שם המורה: פרופ' אמנון יקותיאל

מס' קורס 201-1-9041

שנה: תשס"ז 2006/7 סמסטר: א' מועד: ב'

משך הבחינה: 2 שעות

חומר עזר: מחשבון פשוט [השאלון לפרסום]

הנחיות:

- ענה על 4 (בדיוק) מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות.
- ניתן לצטט משפטים וטענות שהוכחו בכתה.
- נמק והראה את שלבי החישוב (רצוי לבדוק).
- נא לכתוב ברור ונקי!

1. בשאלה זו השדה הוא \mathbb{Q} והמרחב הוקטורי הוא $V := \mathbb{Q}^3$. יהי $v = (v_1, v_2, v_3)$ בסיס של V .

א. יהי $T : V \rightarrow V$ אופרטור ליניארי כך ש- $T(v_1) = v_2$ ו- $T(v_2) = v_1$. מצא שני ערכים עצמיים של T .

ב. האם יש אופרטור ליניארי $S : V \rightarrow V$ כך ש- $S^2 = I$ (אופרטור הזהות) והסקלר $\lambda = 4$ הוא ערך עצמי של S ? אם כן מצא דוגמה; אם לא הוכח זאת.

2. בשאלה זו השדה הוא \mathbb{R} ו-

$V := \{ f(y) \mid f \text{ פולינומים ממעלה } \geq 3 \text{ עם מקדמים ב- } \mathbb{R} \}$.

נגדיר פונקציה $T : V \rightarrow V$ ע"י הנוסחה

$$T(f(y)) := (3y - 1) \frac{df(y)}{dy}$$

כאן $\frac{df(y)}{dy}$ היא הנגזרת.

א. בדוק כי T אופרטור ליניארי.

ב. מצא את המטריצה $[T]_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס $\mathcal{V} := (1, y, y^2, y^3)$.

ג. חשב את הפולינום האופייני ואת הערכים העצמיים של T .

ד. האם T ניתן לליכסון? נמק.

3. בשאלה זו השדה הוא \mathbb{R} ו-

$V := \{ \text{פולינומים } f(y) \text{ ממעלה } \geq 3 \text{ עם מקדמים ב- } \mathbb{R} \}$.

נגדיר פונקציה $T: V \rightarrow V$ ע"י הנוסחה

$$T(f(y)) := \frac{d}{dy}(yf(y)) - 3f(y)$$

כאן $\frac{d}{dy}$ הוא אופרטור הגזירה.

א. בדוק כי T אופרטור ליניארי.

ב. מצא את המטריצה $[T]_{\mathcal{V}}$ המייצגת את T ביחס לבסיס $v := (1, y, y^2, y^3)$.

ג. מצא בסיסים למרחבים $\text{Im}(T)$ ו- $\text{Ker}(T)$, וחשב את מימדי המרחבים האלה.

ד. האם T אופרטור הפיך? נמק.

4. נתונה המטריצה

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

מעל השדה \mathbb{Q} .

א. הצג את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

ב. חשב את A^{-1} .

ג. פתור את המשוואה

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

כאן X הוא משתנה המקבל ערכים ב- $M_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$.

5. נתונה המטריצה

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

מעל השדה \mathbb{Q} .

א. מצא את הפולינום האופייני $p_A(x)$.

ב. לכסן את A . כלומר מצא מטריצה הפיכה P עם ערכים ב- \mathbb{Q} כך ש- $P^{-1}AP$ אלכסונית.

ג. פתור את המשוואה

$$X^3 = A - I$$

כאשר X הוא משתנה המקבל ערכים ב- $M_{3 \times 3}(\mathbb{Q})$ ו- I היא מטריצת היחידה.
(מצא לפחות פתרון אחד.)

בהצלחה!