BEN GURION UNIVERSITY OF THE NEGEV
BE'ER SHEVA 84105, ISRAEL

אוניברסיטת בן גוריון בנגב
באר שבע 84105

פרופ' אמנון יקותיאלי
המחלקה למתמטיקה
20 יוני 2007

עבודת גמר בקורס מבנים אלגבריים 2

הנחיות:

- העבודה היא עצמאית. מותר להעזר בספרות, ואפשר לפנות אלי בשאלות הבהרה. אין להתייעץ עם תלמידים אחרים בקורס ולא עם אנשים נוספים.
- נא להגיש את העבודה עד תאריך 15.8.07.
- יש לענות על כל השאלות, מלבד שאלה 11 אשר הינה רשות. מותר להשתמש בתוצאה המופיעה בשאלה מסויימת, נאמר מספר i, לשם פתרון שאלה שאחריה, נאמר שאלה מספר j כאשר $i < j$, גם אם לא הצלחת לפתור את שאלה i.
- נא לכתוב ברור ונקי. מי שיש לו קושי מתבקש להדפיס.

העבודה עוסקת באלגברה מולטיליניארית, וממשיכה את הפרק על מכפלות טנזוריות. בכל העבודה A הוא חוג קומוטטיבי לא טריוויאלי.

יהיו $M_1, M_2 \ldots, M_r, N$ A–מודולים, כאשר $r \geq 1$. תהי

$$\mu : \prod_{i=1}^{r} M_i = M_1 \times \cdots \times M_r \to N$$

פונקציה. יהי i מספר בין 1 ל– r. אם

$$\begin{aligned}&\mu(m_1, \ldots, m_{i-1}, a \cdot m_i + m', m_{i+1}, \ldots, m_r) = \\ &\quad a \cdot \mu(m_1, \ldots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1}, \ldots, m_r) + \mu(m_1, \ldots, m_{i-1}, m', m_{i+1}, \ldots, m_r)\end{aligned}$$

לכל

$$(m_1, \ldots, m_r) \in M_1 \times \cdots \times M_r \ ,$$

לכל $m' \in M_i$ ולכל $a \in A$, אז אומרים כי הפונקציה μ היא ליניארית בגורם ה– i. אם μ היא ליניארית בכל הגורמים אז היא נקראת **פונקציה מולטיליניארית**. לדוגמה, כאשר $r = 1$ הרי μ הומומורפיזם. וכאשר $r = 2$ הרי μ פונקציה ביליניארית.

שאלה 1. תהי B A–אלגברה (לאו דווקא קומוטטיבית). נגדיר פונקציה

$$\mu : B^r = \underbrace{B \times \cdots \times B}_{r} \to B$$

ע"י הנוסחה

$$\mu(b_1, \ldots, b_r) := b_1 \cdots b_r \ .$$

להוכיח כי זו פונקציה מולטיליניארית.

שאלה 2. נניח כי

$$\mu_1 : M_1 \times \cdots \times M_r \to P_1$$

ו–

$$\mu_2 : N_1 \times \cdots \times N_s \to P_2$$

פונקציות מולטיליניאריות, ו–

$$\nu : P_1 \times P_2 \to Q$$

פונקציה ביליניארית. להוכיח כי הפונקציה

$$\pi : M_1 \times \cdots \times M_r \times N_1 \times \cdots \times N_s \to Q$$

המוגדרת ע"י הנוסחה

$$\pi(m_1, \ldots, m_r, n_1, \ldots, n_s) := \nu\big(\mu_1(m_1, \ldots, m_r), \mu_2(n_1, \ldots, n_s)\big) .$$

הינה פונקציה מולטיליניארית.

יהיו M ו– P שני A–מודולים, יהי $r \geq 1$, ותהי

$$\mu : M^r = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{r} \to P$$

פונקציה מולטיליניארית. נניח כי

$$\mu(m_1, \ldots, m_r) = 0$$

עבור כל r–יה $(m_1, \ldots, m_r)$ שיש בה חזרות, כלומר $m_i = m_j$ לאיזה זוג אינדקסים $i < j$. אז μ תיקרא **פונקציה מולטיליניארית מתחלפת** (alternating).

שאלה 3. ניקח $M := (A^r)^{\mathrm{t}}$, מודול העמודות בגובה r. אז כל איבר

$$(m_1, \ldots, m_r) \in M^r$$

הוא בעצם מטריצה בגודל $r \times r$, וע"י הדטרמיננטה מקבלים פונקציה

$$\det : M^r \to A.$$

להוכיח כי זו פונקציה מולטיליניארית מתחלפת.

הגדרה. יהי M A–מודול, ויהי $r \geq 1$. **חזקה טנזורית חיצונית** (exterior tensor power) ממעלה r של המודול M הוא זוג (P, μ), שבו P הוא A–מודול, ו–

$$\mu : M^r \to P$$

היא פונקציה מולטיליניאריות מתחלפת. הזוג הזה צריך לקיים את התכונה האוניברסלית הבאה: בהנתן A–מודול P' ופונקציה מולטיליניארית מתחלפת $\mu' : M^r \to P'$, ישנו הומומורפיזם יחיד $\phi : P \to P'$ כך ש–

$$\mu' = \phi \circ \mu .$$

שאלה 4. יהי M A–מודול, ויהי $r \geq 1$. להוכיח כי קיימת חזקה טנזורית חיצונית ממעלה r של המודול הזה, נאמר (P, μ), וכי היא יחידה. לנסח בדיוק מהי תכונת היחידות. [רמז: כמו במשפט שהוכח בכיתה לגבי המכפלה הטנזורית $M \otimes_A N$, אבל צריך להוסיף יחסים המבטאים את ההתחלפות.]

נסמן את החזקה הטנזורית החיצונית (P,μ) ממעלה r כך:

$$\bigwedge\nolimits_A^r M := P$$

ו–

$$m_1 \wedge \cdots \wedge m_r := \mu(m_1, \ldots, m_r) \ .$$

עבור $r = 0$ נגדיר

$$\bigwedge\nolimits_A^0 M := A \ .$$

שאלה 5. יהי M A–מודול, ויהי $r \geq 1$. תהי σ תמורה (פרמוטציה) של הקבוצה $\{1, \ldots, r\}$. אז לכל $m_1, \ldots, m_r \in M$ מתקיים

$$m_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma(r)} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot m_1 \wedge \cdots \wedge m_r \ .$$

כאן $\mathrm{sgn}(\sigma)$ הסימן של התמורה σ.

שאלה 6. יהי M A–מודול. נניח כי M נוצר ע"י אוסף איברים $\{m_i\}_{i=1}^r$. להוכיח כי לכל $k \geq 0$ ה–A–מודול $\bigwedge_A^k M$ נוצר ע"י אוסף האיברים

$$\{m_{i_1} \wedge \cdots \wedge m_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} \ .$$

בפרט עבור $k > r$ מקבלים

$$\bigwedge\nolimits_A^k M = 0 \ .$$

שאלה 7. יהי M A–מודול חופשי מדרגה r, עם בסיס $\{m_i\}_{i=1}^r$. להוכיח כי לכל $0 \leq k \leq r$ ה– A–מודול $\bigwedge_A^k M$ הוא חופשי, עם בסיס

$$\{m_{i_1} \wedge \cdots \wedge m_{i_k}\}_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq r} \ .$$

[רמז: כמו הוכחת המשפט עבור $M \otimes_A N$ בכיתה, תוך שימוש בשאלה 5.]

שאלה 8. זו שילוב של שאלות 3 ו– 7. יהי $r \geq 1$ ויהי $M := (A^r)^{\mathrm{t}}$. יהי

$$\phi : \bigwedge\nolimits_A^r M \to A$$

ההומורפיזם שמתאים לפונקציה המולטילינארית המתחלפת

$$\det : M^r \to A \ .$$

להוכיח כי ϕ היא איזומורפיזם של A–מודולים.

שאלה 9. יהי M A–מודול חופשי עם בסיס $\{m_i\}_{i \in I}$ הממוספר ע"י קבוצה I. נניח ש– $\{n_j\}_{j=1}^r$ הוא אוסף איברים היוצר את M. להוכיח כי $|I| \leq r$. [רמז: לבחור אידיאל מקסימלי $\mathfrak{m}$ ב– A ולחשב את הדרגה של המודול $M/\mathfrak{m}M$ מעל השדה $A/\mathfrak{m}$.]

שאלה 10 . נגדיר $B := A[x,y]$, חוג הפולינומים בשני משתנים מעל החוג A. מטרת השאלה להוכיח כי החוג B איננו ראשי. ההוכחה תעשה שימוש ברעיון מהחשבון הדיפרנציאלי. מי שמעדיף יכול להניח ש–A שדה, למשל $A = \mathbb{R}$.

בהנתן פולינום $f(x,y) \in B$ נסמן ב־ $f(0,0) \in A$ את האיבר המתקבל ע״י ההצבה $x := 0$, $y := 0$.
יהי

$$\mathfrak{b} := (x,y) \subset B\ ,$$

כלומר האידיאל הנוצר ע״י האיברים x ו־ y. ידוע כי לנו הומומורפיזם ההצבה $f(x,y) \mapsto f(0,0)$ משרה איזומורפיזם של חוגים $A \xrightarrow{\simeq} B/\mathfrak{b}$. באופן הזה אנו נראה את A כ־ B–מודול.

א. עבור פולינום $f(x,y)$ נסמן ב־ $\frac{\partial}{\partial x} f$ ו־ $\frac{\partial}{\partial y} f$ את הנגזרות החלקיות, אשר הינן פולינומים. נגדיר

$$\phi(f) := (\tfrac{\partial}{\partial x} f)(0,0) \in A$$

ו־

$$\psi(f) := (\tfrac{\partial}{\partial y} f)(0,0) \in A\ .$$

להוכיח כי הפונקציות

$$\phi, \psi : \mathfrak{b} \to A$$

הן B–ליניאריות. [רמז: להשתמש בכלל הנגזרת של מכפלה, כלומר

$$\tfrac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = (\tfrac{\partial}{\partial x} f) \cdot g + f \cdot (\tfrac{\partial}{\partial x} g)\ .$$

אזהרה: הפונקציות $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} : \mathfrak{b} \to B$ וגם $\phi, \psi : B \to A$ אינן B–ליניאריות.]

ב. להוכיח כי הפונקציה

$$J : \mathfrak{b} \times \mathfrak{b} \to A$$

המוגדרת ע״י

$$J(f,g) := \det\left(\begin{bmatrix} \phi(f) & \phi(g) \\ \psi(f) & \psi(g) \end{bmatrix}\right)$$

הינה פונקציה ביליניארית מתחלפת של B–מודולים. להסיק שיש הומורפיזם מושרה

$$\tau : \textstyle\bigwedge_B^2 \mathfrak{b} \to A\ .$$

ג. לחשב את $\tau(x \wedge y) \in A$. להסיק כי $x \wedge y \neq 0$, ולכן המודול $\bigwedge_B^2 \mathfrak{b}$ איננו מודול האפס.

ד. להוכיח שהאידיאל $\mathfrak{b}$ איננו ראשי. [רמז: אידיאל ראשי הוא מודול ציקלי, כלומר נוצר ע״י איבר אחד. להשוות סעיף ג׳ לשאלה 6 עם $r = 1$.]

שאלה 11. (רשות) בהמשך לשאלה 10, ניתן לשאול האם האידיאל $\mathfrak{b}$ הוא אולי B–מודול חופשי, מדרגה גדולה מ־ 1.

א. יהי $f = f(x,y) \in B$. נניח ש־ $x \cdot f = 0$. להראות ש־ $f = 0$.

ב. יהי M A–מודול חופשי ויהי $m \in M$. נניח ש־ $x \cdot m = 0$. להראות ש־ $m = 0$.

ג. לחשב

$$x \cdot (x \wedge y) \in \textstyle\bigwedge_B^2 \mathfrak{b}\ .$$

להסיק ש– $\mathfrak{b}$ $\bigwedge_B^2$ איננו B–מודול חופשי.

ד. להוכיח כי $\mathfrak{b}$ איננו B–מודול חופשי. [רמז: אילו היה חופשי, הדרגה היתה $r \leq 2$, לפי שאלה 9. לכן לפי שאלות 6 ו– 7 המודול $\mathfrak{b}$ $\bigwedge_B^2$ היה צריך להיות חופשי. להשוות לסעיף ג.]

בהצלחה!