בהינתן אופרטור α וע"ע λ, המרחב
$V \supset Ker(\alpha-\lambda)$ נקרא המרחב העצמי
השייך ל־λ.

למה יהי α אופרטור ניתן ללכסון,
עם ע"ע $\lambda_1,\dots,\lambda_m$. לכל i יהי π_i
אופרטור ההטלה מהמשפט הקודם. אז
$V_i = Im(\pi_i)$ הוא המרחב העצמי השייך ל־λ_i.

הוכחה: כבר הוכחנו כי כל $w \in V_i$ מקיים
$\alpha(w) = \lambda_i w$. לכיוון ההפוך, נניח כי $\alpha(w) = \lambda_i(w)$.
צ"ל כי $w = \pi_i(w)$. כעת

$$w = \sum_{j=1}^{m} \pi_j(w).$$

נראה ש־$\pi_j(w)=0$ לכל $j \neq i$. $\pi_j(w) \in V_j$ ⇐
$\alpha(\pi_j(w)) = \lambda_j \pi_j(w)$. מצד שני:

$$\alpha(\pi_j(w)) = \pi_j(\alpha(w)) = \pi_j(\lambda_i w) = \lambda_i \pi_j(w)$$

⇐ $(\lambda_i - \lambda_j)\pi_j(w) = 0$ ⇐ $\pi_j(w) = 0$

□

משפט. יהיו α, β שני אופרטורים ניתנים ללכסון
מתחלפים. אז $\beta+\alpha$ ($\alpha \cdot \beta$,$\alpha-\beta$) ניתנים ללכסון.

הוכחה. יהי $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$ הפירוק של V לפי
מרחבים עצמיים של α. מאחר ש־α ו־β מתחלפים
הרי $\beta(V_i) \subset V_i$, ראינו לפני A השאלה.
יהי $\beta_i = \beta|_{V_i} \in End_K(V_i)$. $g_\beta(t)$ הפולינום המינימלי של β,
ויהי $g_{\beta_i}(t)$ הפ' המינ' של β_i. מצד 1: $g_\beta(\beta_i)=0$
הרי $g_{\beta_i}(t)$ מחלק את $g_\beta(t)$, ולכן $g_{\beta_i}(t)$ מתפרק
לגורמים לינאריים זרים (ראה מבחן 1). לכן β_i ניתן
ללכסון ולכן $V_i = \bigoplus_j W_{ij}$, פירוק של V_i למרחבים

(15) אלמנטים שונים ב- β_i לכל

$V \equiv \bigoplus_{i,j} W_{i,j}$, לכל W_{ij}

הנ״ל אנחנו רוצים מעתיק α-ל β-ל ; כלומר

אם $w \in W_{ij}$ אזי $\alpha(w)=\lambda w$

$\beta(w)=\mu w$ כאשר $\lambda, \mu \in K$. לכן

$(\alpha+\beta)(w)=(\lambda+\mu)w$. מסקנה: $\alpha+\beta$ ניתן ללכסון.

משפט (פירוק ז'ורדן-שבליי של אופרטור לינארי)
Jordan-Chevalley

יהי V מרחב-K וקטורי נוצר סופית ו-
$\alpha \in End_K(V)$. נניח כי α מתפצל מעל K. אז
קיימים אופרטורים יחידים $\alpha_s, \alpha_n \in End_K(V)$
המקיימים:

(i) α_s ניתן ללכסון

(ii) α_n נילפוטנטי.

(iii) α_s ו- α_n מתחלפים

(iv) $\alpha = \alpha_s + \alpha_n$.

α_s נקרא החלק הניתן ללכסון של α, ו- α_n נקרא החלק הנילפוטנטי.

הוכחה: יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in K$ כל הע"ע של α,
כלומר הפולינום האופייני הוא

$$P_\alpha(t) = \prod_{i=1}^{m} (t-\lambda_i)^{n_i}.$$

לפי משפט השאריות הסיני יש פולינום $f(t) \in K[t]$
כך ש- $f(t) \equiv \lambda_i \mod (t-\lambda_i)^{n_i}$ לכל i,

כאשר השתמשנו ביתר, עבור פולינומים $(t-\lambda_i)^{n_i}$ זרים
בזוגות, הרי לפי משפט השאריות הסיני של איברים
של $K[t]$ – חוג ראשי.

$$(*) \quad \frac{K[t]}{(P_\alpha(t))} \cong \prod_{i=1}^{m} \frac{K[t]}{(t-\lambda_i)^{n_i}}$$

ונקח

$$\overline{f(t)} \leftrightarrow (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m)$$

כלומר, "–" מציין מחלקת שקילות בחוג המנה המתאים.

נגדיר $\alpha_s := f(\alpha) \in End_K(V)$ ו- $\alpha_n := \alpha - \alpha_s \in End_K(V)$

ברור כי α_s ו- α_n מתחלפים, וכי $\alpha = \alpha_s + \alpha_n$

ב) נראה כי α_s ניתן ללכסון: יהיו (++)
$\pi_i \in End_K(V)$ האופרטורים ההטלה בדומה לפירוק (א)
כלומר $\pi_i \leftrightarrow (0, \dots, 1_i, \dots, 0)$. נזכיר לכך כי:
$\pi_i \in K[\alpha]$, ולכן π_i מתחלף עם α. כמו כן $f(\alpha)\circ\pi_i = \lambda_i \pi_i$

$V_i := Im(\pi_i) \subset V$, אז $V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i$.

ניקח $w \in V_i$. אז $\pi_i(w) = w$. ולכן:

$$\alpha_s(w) = f(\alpha)(w) = f(\alpha)(\pi_i(w)) = (f(\alpha)\circ\pi_i)(w) = \lambda_i \pi_i(w)$$

מש"ל ולכן α_s ניתן ללכסון (+++)

ג) נראה כי α_n נילפוטנטי. ידוע כי $(\alpha-\lambda_i)^{n_i}\circ\pi_i = 0$.
ניקח $w \in V_i$. אז

$$\alpha_n^{n_i}(w) = (\alpha-\alpha_s)^{n_i}(w) = (\alpha-\lambda_i)^{n_i}(w) = ((\alpha-\lambda_i)^{n_i}\circ\pi_i)(w) = 0$$

ומכיוון ש- $V = \oplus V_i$ ⇐ $\alpha_n^{\max\{n_i\}} = 0$ ⇐ α_n נילפוטנטי!

ר' גם 12.3

ד) יחידות הפירוק: נניח כי $\alpha = \beta_s + \beta_n$
כאשר β_s ניתן ללכסון, β_n נילפוטנטי, ו- $\beta_s\beta_n = \beta_n\beta_s$.
מכיוון ש- $\alpha_s = f(\alpha)$ ו- $\alpha_n = \alpha - f(\alpha)$ הרי
$\alpha_n, \alpha_s, \beta_n, \beta_s$ כולם מתחלפים זה עם זה.
נגדיר $\gamma := \alpha_s - \beta_s = \beta_n - \alpha_n$. זה סכום של
γ נילפוטנטי, וגם סכום של γ ניתן
ללכסון, ולכן $\gamma = 0$
□

(+) לפי משפט קיילי-המילטון $P_\alpha(\alpha)=0$, ולכן יש הומו' של K-אלגברות
$\bar\varphi: \frac{K[t]}{(P_\alpha(t))} \to K[\alpha]$, כך ש- $\bar\varphi(t) = \alpha$.

(++) כלומר, קיימים $\bar f_i \in \frac{K[t]}{(P_\alpha(t))}$ ו- $\pi_i := \bar\varphi(\bar f_i)$.

(+++) ראינו ב- $\frac{K[t]}{(P_\alpha(t))}$ ש- $\bar f \cdot \bar f_i = \lambda_i \bar f_i$, ולכן $\alpha_s\circ\pi_i = \lambda_i\pi_i$

משפט ההעתקה הספקטרלי
(Spectral mapping)

הגדרה. יהי $\alpha \in End_k(V)$, ונניח כי α מתפצל מעל K. הספקטרום של α הוא קבוצת הערכים העצמיים של α, ומסומן ב- $Spec(\alpha)$.

טענה. יהי α אופרטור שמתפצל מעל K, עם פירוק ז'ורדן $\alpha = \alpha_s + \alpha_n$. אזי
$$Spec(\alpha) = Spec(\alpha_s)$$

הוכחה. יהי w וקטור עצמי של α או של α_s, עם ע"ע
יהי i מקסימלי כך ש- $\alpha_n^i(w) \neq 0$
ו- $\alpha_n^{i+1}(w) = 0$, ונגדיר $w' := \alpha_n^i(w)$.

אזי
$$\begin{aligned}\alpha(w') &= (\alpha_n + \alpha_s)(w') \\ &= (\underbrace{\alpha_n \circ \alpha_n^i}_{0} + \alpha_s \circ \alpha_n^i)(w) \\ &= (\alpha_s \circ \alpha_n^i)(w) = \alpha_s(w')\end{aligned}$$

כלומר $\alpha(w') = \alpha_s(w') = \lambda w'$.

ראינו כי $\lambda \in Spec(\alpha) \Leftrightarrow \lambda \in Spec(\alpha_s)$. $\blacksquare$

משפט. יהי $\alpha \in End_k(V)$ אופרטור שמתפצל מעל K, ויהי $f(t) \in K[t]$ פולינום.
אזי
$$Spec(f(\alpha)) = f(Spec(\alpha)).$$

כלומר: $\lambda \in Spec(f(\alpha))$ אמ"מ קיים $\mu \in Spec(\alpha)$ כך ש- $\lambda = f(\mu)$.

(19)

הוכחה יהי $\alpha=\alpha_s+\alpha_n$ פירוק ג'ורדן

k α . נניח $f(t)=\sum_i a_i t^i$

אז

$$f(\alpha)=\sum_i a_i\alpha^i=\sum_i a_i(\alpha_s+\alpha_n)^i=$$

$$\left[(\alpha_s+\alpha_n)^i=\sum_{k=0}^{i}\binom{i}{k}\alpha_n^k\alpha_s^{i-k}\right]$$

$$=\sum_i a_i\left(\alpha_s^i+\alpha_n(\cdots)\right)=\sum_i a_i\alpha_s^i+\alpha_n\beta$$

$$=f(\alpha_s)+\alpha_n\cdot\beta$$

כאשר $\beta\in K[\alpha_s,\alpha_n]\subset\mathrm{End}_K(V)$. לכן

$(\alpha_n\cdot\beta)^i=\alpha_n^i\beta^i=0$ ולכן $0\ll i$

$\boxed{f(\alpha)_s=f(\alpha_s)}$ מסקנה: $\alpha_n\cdot\beta$ נילפוטנטי, ו- $f(\alpha_s)$ ניתן ללכסון

הפירוק של $f(\alpha)$ ללכסון

$\mathrm{Spec}(\alpha)=\mathrm{Spec}(\alpha_s)$

$\mathrm{Spec}(f(\alpha))=\mathrm{Spec}(f(\alpha)_s)$ ו- של הפירוק הוכחה

נותר להוכיח כי: $\boxed{f(\mathrm{Spec}(\alpha_s))\stackrel{?}{=}\mathrm{Spec}(f(\alpha_s))}$ (*)

יהי $\underline{w}=(w_1,\dots,w_n)$ בסיס מלכסן עבור α_s אז

$\underline{w}$ גם מלכסן עבור $f(\alpha_s)$. אם $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$

הם ערכים העצמיים של α_s, כלומר $\alpha_s(w_i)=\lambda_i w_i$,

אז $(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n))$ הם ערכים העצמיים של

$f(\alpha_s)$. כלומר (*) מתקיים. $\square$

ג' 14.3

דוגמא:

תרגיל. הראה שהמשוואה $X^2=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$

אין פתרון ב- $\mathrm{End}_k(k^2)=M_2[k]$.

(k שדה כלשהו).

~~פתרון~~

תרגיל. מצא את כל הפתרונות של

המשוואה $X^2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ מעל $\mathbb{Q}$ (עד דמיון)

הוכח שיש יותר מאינסוף ...)

תרגיל. נניח $\alpha\in\mathrm{End}_k(V)$ מרחב סוף מעל k. יהי α_s

החלק הפשוט למחצה של α. הוכח כי הפולינום האופייני

מקיים $p_\alpha(t)=p_{\alpha_s}(t)$ (רמז: $V=\bigoplus_{i=1}^{m}V_i$ הפירוק כמו

בהוכחה של ... $p_\alpha(t)=\prod p_{\alpha|V_i}(t)$ ... ולכן $p_{\alpha|V_i}(t)=(t-\lambda_i)^{l_i}$

$l_i:=\mathrm{rank}_k V_i$ $\quad$ $\mathrm{Spec}(\alpha|V_i)=\{\lambda_i\} \Rightarrow \; = p_{\alpha_s|V_i}(t)$