(38) ההוכחה של משפט 1 דומה לתהליך
דרך, שלמדנו.

הגירסה המטריציאלית למשפט 1:

<u>מסקנה</u> תהי A מטריצה סימטרית. אז יש
מטריצה הפיכה P כך ש-

$$P^tAP = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 \; \ddots & & 0 \\ \hline & -1 \; \ddots & \\ \hline 0 & & 0 \; \ddots \end{array}\right]$$

$\boxed{\text{תרגיל}}$ להוכיח את המסקנה מהמשפט 1.

עד פה
26.3

לפני ההוכחה של המשפטים
וקטורים v,w המקיימים $\langle v,w\rangle = \langle w,v\rangle = 0$
נקראים <u>מאונכים</u> (orthogonal). בסיס $\{v_i\}$ המקיים
$\langle v_i,v_j\rangle = 0$ לכל $i \neq j$ נקרא <u>בסיס</u>
<u>אורתוגונלי</u>.

<u>שלב 1</u> נניח התבנית $\langle -,- \rangle$ אינה אפס.
אז יש וקטור $v \in V$ אשר אינו מאונך לעצמו,
כלומר $\langle v,v\rangle \neq 0$
<u>הוכחה</u> לפי ההנחה יש זוג וקטורים v,w
כך ש- $\langle v,w\rangle \neq 0$.
אם $\langle v,v\rangle \neq 0$ או $\langle w,w\rangle \neq 0$ סיימנו.
אחרת נחשב:
$$\langle v+w, v+w\rangle = \cancel{\langle v,v\rangle} + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \cancel{\langle w,w\rangle}$$
$$= 2\langle v,w\rangle \neq 0$$
אז $v+w$ אינו מאונך לעצמו. □

(31) בהינתן תת מרחב $W \subset V$, המשלים האורתוגונלי ל-W הוא

$$W^{\perp} := \{ v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0 \ \text{לכל}\ w \in W \}.$$

ברור שזהו תת-מרחב של V.

טענה 2 יהי $w \in V$ וקטור המקיים $\boxed{\langle w, w \rangle \neq 0}$. נגדיר $W := \mathbb{R} \cdot w$.

אז $V = W \oplus W^{\perp}$

הוכחה

(א) נראה כי $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.

יהי v ב-$W \cap W^{\perp}$ אז $v = aw$ עבור $a \in \mathbb{R}$, ו- $0 = \langle w, v \rangle = a \cdot \langle w, w \rangle \Rightarrow$

$a = 0$

(ב) נראה כי $V = W + W^{\perp}$. די להראות ש...

יהי $v \in V$ נגדיר

$a := \langle w, v \rangle / \langle w, w \rangle \in \mathbb{R}$ ו- $u := v - aw$.

אז $\langle w, u \rangle = \langle w, v \rangle - a \langle w, w \rangle = 0$

לכן $u \in W^{\perp}$ ומתקיים: $v = u + aw$.

$\square$

32

הגרעין של התבנית $\langle -,- \rangle$ הוא

הערה ר' $V^{\perp}$; כלומר: $\{u \mid \langle u,v\rangle = 0$ לכל $v \in V\}$

התבנית נקראת לא מנוונת אם $V^{\perp} = \{0\}$

טענה 3 תהי A המטריצה המייצגת את $\langle -,- \rangle$ ביחס לבסיס $\underline{v}$.

א) ו $\varphi : V \to \mathbb{R}^n$ העתקת הקואורדינטות

המושרה ע"י הבסיס $\underline{v}$ אזי

$$\varphi(V^{\perp}) = \mathrm{Ker}(A),$$

כאשר $\mathrm{Ker}(A) = \{u \in \mathbb{R}^n \mid Au = 0\}$

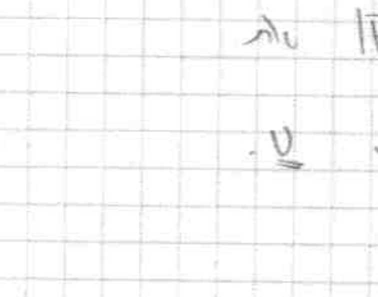
ב) התבנית לא-מנוונת אמ"מ המטריצה A הפיכה.

הוכחה א) נסמן ב- $[v]_{\underline{v}} \in \mathbb{R}^n$ את

וקטור הקואורדינטות של $v \in V$ ביחס לבסיס $\underline{v}$.

כלומר $\varphi(v) = [v]_{\underline{v}}$

מהגדרת A:



$$A_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle =$$

נזכיר ש: $e_i^t A e_j = A_{ij}$

לכן לכל וקטור $v \in V$

כשכותבים $[v]_{\underline{v}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

מקבלים

$$\langle v_i, v\rangle = \langle v_i, \sum_j b_j v_j \rangle$$

$$\sum_j b_j \cdot \langle v_i, v_j \rangle = \sum_j b_j\, a_{ij}$$

$$= [\,\cdots \underset{i}{1} \cdots\,] \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = e_i^t \cdot A \cdot [v]_{\underline{v}}$$

לכן $v \in V^\perp \iff \langle v_i, v\rangle = 0$ לכל i

$\iff e_i^t \cdot A \cdot [v]_{\underline{v}} = 0$ לכל i $\iff$

$A \cdot [v]_{\underline{v}} = 0$

ב) הוכחה כמו א) $\square$

~~טענה 3: יהי W תת-מרחב של V.~~
~~נניח כי המכפלה $\langle -,- \rangle$ ל-W היא~~
~~תקינה בלתי מנוונת (כלומר $W^\perp \cap W = \{0\}$)~~
~~אז $V = W \oplus W^\perp$~~

~~הוכחה: $\boxed{\text{תרגיל}}$. רמז: דומה להוכחת טענה 2~~ $\square$

הוכחת משפט האורתוגונליזציה

ההוכחה היא באינדוקציה על המימד של V.

אם התבנית $\langle,\rangle$ היא תבנית האפס ניקח בסיס כלשהו $\underline{v}$; מטריצת הגרם תהיה $[0]$.

אחרת, יש וקטור $v \in V$ שאינו איזוטרופי עקב (למה-פולריזציה)

נגדיר $W := \mathbb{R}\cdot v$. לפי טענה מס' 2 מהשיעור:

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

כעת לצמצום של $\langle,\rangle$ למרחב $W^{\perp}$ יש בסיס אורתוגונלי $(w_2,\dots,w_n)$ כך ש- $\langle w_i, w_i\rangle \in \{0,-1,1\}$; זה מהנחת האינדוקציה.

נגדיר $a := \langle v, v\rangle$ ו- $w_1 := |a|^{-1/2}\cdot v$ אז $\langle w_1, w_1\rangle \in \{\pm 1\}$.

ונקבל בסיס $(w_1,\dots,w_n)$ כנדרש. $\square$

משפט סילבסטר

יהי: $\langle,\rangle$ תבנית בילינארית סימטרית על מרחב ממשי V. אז ישנו זוג מספרים טבעיים (p,m), הנקראים הסיגנטורה של $\langle,\rangle$, תלויים רק בתבנית. יהי $\underline{v} = (v_1,\dots,v_n)$ בסיס אורתוגונלי של V ביחס ל- $\langle,\rangle$, כך ש- $\langle v_i, v_i\rangle \in \{0,1,-1\}$. אז

$$p = \#\{i \mid \langle v_i, v_i\rangle = 1\}$$

ו- $$m = \#\{i \mid \langle v_i, v_i\rangle = -1\}.$$

הוכחת המשפט סילבסטר

נבחר בסיס $\underline{U}$ כך שסדר (m,p) מתקבל.

ובה"כ נבחר $\underline{U}'=(u'_1,\dots,u'_n)$

בסיס אורתוגונלי אחר לפי תבנית כזו, אז

$p'=p$ ו- $m'=m$.

תחילה נראה כי $p+m$ בלתי תלוי ב- $\underline{U}$.

לשם כך נראה כי:

$$p+m = n-\dim V^{\perp} . \quad (*)$$

אכן:

$$A=\left[\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & -1 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right]$$

$\quad p \quad m$

המטריצה המייצגת את $\langle,\rangle$ בבסיס $\underline{U}$

אז מטענה מס' 3,

$$\dim V^{\perp} = \dim \mathrm{Ker}(A) = n-(m+p)$$

זה מוכיח את $(*)$. בפרט $\boxed{(**) \quad p+m=p'+m'}$

כעת נתבונן בסדרה הבאה:

$$(\underbrace{u_1,\dots,u_p}_{p} \mid \underbrace{u'_{p'+1},\dots,u'_n}_{n-p'})$$

השלמה של $\underline{U}$ מ- $\underline{U}'$

שאורכה $p+n-p'=n+(p-p')$.

טענו כי היא בת"ל; אם נוכיח כ- $p-p'\leq 0$, כלומר $p\leq p'$. בדרך סימטרית מקבלים $p'\leq p$; לכן $p=p'$. יחד עם $(**)$ מקבלים גם $m=m'$

יהיו נניח כי $(a_1,\dots,a_p,a'_{p'+1},\dots,a'_n)$

סדרת סקלרים כך ש

$$(*)\quad a_1v_1+\dots+a_pv_p+a'_{p'+1}v'_{p'+1}+\dots+a'_nv'_n=0$$

כלומר

$$a_1v_1+\dots+a_pv_p=-a'_{p'+1}v'_{p'+1}-\dots-a'_nv'_n\ ,$$

נגדיר וקטור זה בתור u כלומר

$$(**)\quad \langle u,u\rangle=\sum_{i=1}^{p}a_i^2\cdot\langle v_i,v_i\rangle\ \geq 0$$

כי $(v_1,\dots,v_p)$ סדרה אורתוגונלית, וכן $\langle v_i,v_i\rangle=1$.

וכן

$$\langle u,u\rangle=\sum_{i=p'+1}^{n}(a'_i)^2\cdot\langle v'_i,v'_i\rangle\leq 0$$

כי $\langle v'_i,v'_i\rangle\in\{1,-1\}$

מסיקים כי $\langle u,u\rangle=0$ ולכן ב-(**) נקבל

כי $a_1=\dots=a_p=0$. מאחר ש- $(v'_{p'+1},\dots,v'_n)$

בת"ל הרי ב-(*) מקבלים $a'_{p'+1},\dots,a'_n=0$.

∎

עד פה 28.3