מודולים חופשיים (37)

המשך - דטרמיננטות

לא לגמרי אלי

יהי A חוג קומוטטיבי. לכל מספר
טבעי r הקבוצה A^r היא A-מודול
עם הפעולות לפי רכיבים:

$$a\cdot\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_r\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}ab_1\\\vdots\\ab_r\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\\vdots\\b_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\\vdots\\a_r+b_r\end{bmatrix}$$

מודול M שהוא איזומורפי ל- A^r
עבור איזה r נקרא מודול חופשי נוצר סופית.
טענה (X) (לא הוכח)

משפט יהיו כי $A^r \cong M$ וגם $M \cong A^s$
אז $r=s$

הוכחה. יהי m אידיאל מקסימלי כלשהו
בחוג A. (קיים אידיאל מקסימלי כי $A \neq \{0\}$).
יהי $K := A/m$ שדה השארית.
נסמן mM תת-המודול של M
הנוצר ע"י איברים מהצורה ax, $x\in M$,
$a \in m$. נגדיר

$$\bar{M} := \frac{M}{m\cdot M}$$

המודול הזה $\bar{M}$ הוא K-מודול,
לפי טענה (X) - מוגדר היטב הדרגה $\operatorname{rank}_K \bar{M}$.

נניח כי איזומורפיזם $M \cong A^r$ מצטמצם
לאיזומ' של K-מודולים $\bar{M} \cong A^r/m\cdot A^r \cong K^r$

(3א) לכן צ"ל שהוא על הבסיס של $A^n/\mathfrak{m}A^n$

נגדיר הומומורפיזם של A-מודולים

$$\varphi : A^n \to K^n \qquad \varphi\left(\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \bar a_1 \\ \vdots \\ \bar a_n \end{bmatrix}$$

צריך להראות: מהו $Ker(\varphi)$? $x = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in Ker(\varphi)$

$\Leftrightarrow$ $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{m}$

נגדיר: $x = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i$ אז $x \in Ker(\varphi)$ $\Leftarrow$ $x \in \mathfrak{m}M$

ולכן הפוך, $x \in \mathfrak{m}M$ $\Leftarrow$ $x = \sum b_{ij} x_j$, $b_1, \dots, b_m \in \mathfrak{m}$ $\Leftarrow$ $\varphi(x) = \sum \bar b_{ij} \bar x_j = 0$

~~$x = \sum a_i \vec{e}_i$ ... $x \in \mathfrak{m}A^n$~~

מסקנה: $Ker(\varphi) = \mathfrak{m}A^n$ לכן

$$\bar M \cong \frac{A^n}{\mathfrak{m}A^n} \cong K^n$$

כלומר $rank_K \bar M = n$

אבל הוכחנו כבר $rank_K \bar M = r$ □

טענה (*) יהי A חוג, M A-מודול, ו-$\mathfrak{a}$ אידיאל ב-A.
נסמן $\mathfrak{a}M$ להיות תת-המודול של M שנוצר ע"י
איברים מהצורה am, כאשר $m \in M$, $a \in \mathfrak{a}$.
נסמן $\bar A := A/\mathfrak{a}$ ו- $\bar M := M/\mathfrak{a}M$

אז $\bar M$ הוא $\bar A$-מודול, כאשר הכפל הוא
$\bar a \cdot \bar m := \overline{am}$

הוכחה: תרגיל

יש טופולוגיה המתאימה עבור צדדים שונים

לכן יש דרך להגדיר מהו כפל.

סימון: יהי M A-מודול, תהי S קבוצה, ותהיינה $\varphi: S \to A$ ו- $\psi: S \to M$ פונקציות. נניח כי φ פונקציה עם תומך סופי, כלומר

$$\#\{s\in S \mid \varphi(s)\neq 0\} < \infty$$

אז הביטוי $\sum_{s\in S}\varphi(s)\psi(s) \in M$

מוגדר כך: $\sum_{s\in S}\varphi(s)\cdot\psi(s) := \sum_{s\in S'}\varphi(s)\cdot\psi(s)\in M$

כאשר S' היא הקבוצה הסופית $\{s\in S \mid \varphi(s)\neq 0\}$

~~אופן אחר: ל-M משפחה של S הינה פונקציה $\psi: S\to M$. נהוג לסמן כך: $\{m_s\}_{s\in S}$, כאשר $m_s := \psi(s)\in M$~~

הגדרה: יהי M A-מודול. בסיס של M שמורכב מ: קבוצה S ופונקציה $\psi: S\to M$ של התכונה הבאה: לכל איבר $m\in M$ יש פונקציה עם תומך סופי יחידה $\varphi: S\to A$ כך ש- $m=\sum_{s\in S}\varphi(s)\psi(s)$.

בדרך כלל מעניין את הפונקציה

$M\otimes_Z \Psi$ כך: $\{m_s\}_{s\in S}$, כאשר $m_s := \Psi(s)\otimes M$.

אם נאמר כי $\{m_s\}_{s\in S}$ הוא אוסף של יוצרים

כ. M הנוצר ע"י S. לדוגמא $\{\Psi(s)\}_{s\in S} = \{m_s\}_{s\in S}$

דורשים הבדלים A ... m כמו למשל $\{m_s\}$

הגדרה M נקרא מודול חופשי אם יש

אם ורק אם $\{m_s\}_{s\in S}$ הוא בסיס של S

דוגמה: A^r הינו A מודול חופשי: נבחר

S נבחר את הקבוצה $S := \{1,\dots,r\}$

ונגדיר $\Psi: S\to A^r$ ע"י $\Psi(i) := \vec{e}_i$

המשפט שהוכחנו אומר שעד כדי S ו-M

[illegible] כל הבסיסים [illegible]

משפט יהי A חוג (דורשים קומוטטיבי), יהי M A-מודול חופשי. אז כל הבסיסים של M יהיו באותו גודל.

[לא נוכיח משפט זה. הרעיון: [illegible] [illegible] [illegible] הוא [illegible] של [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] הנוסף.]

(41) מאלגברה ליניארית ידוע לנו שמעל שדה K, כל מודול נוצר סופית הוא חופשי.
זה גם נכון בלי הגבלת הסופיות:

משפט כל מודול מעל שדה הוא חופשי.

תרגיל

1) יהי M $\mathbb{Z}$-מודול חופשי. להוכיח:
$m\in M$ אינו פיתול $\Leftarrow$ $m\neq 0$.
(m נקרא איבר פיתול אם הוא מסדר סופי, כלומר יש $n>0$ כך ש- $n\cdot m=0$].

2) האם ה- $\mathbb{Z}$-מודול $M:=\mathbb{Z}/(2)$ הינו חופשי?

3) יהי A חוג עם חילוק. להוכיח:
A שדה $\Leftrightarrow$ כל A-מודול נוצר סופית הינו חופשי.

עד כאן 30.5