42

משפט. יהי A חוג עם יחידה ותהי I

קבוצה. אז יש מודול חופשי M עם

בסיס $\{m_i\}_{i\in I}$

הוכחה. נגדיר M באופן הבא:

$$M := \{ f: I\to A \mid \text{פונקציה עם תומך סופי} \}$$

נראה ש-M A-מודול עם פעולות לפי ההגדרה:

נגדיר פעולות הנקודתיות הרגילות: יהי $a\in A$

ו- $f,g\in M$. נגדיר $f+g: I\to M$ ו- af

$$(f+g)(i) := f(i)+g(i)$$
$$(af)(i) := a\cdot f(i)$$

צ"ל $f+g$ ו- af שייכים ל-M

קל לראות. אקסיומות המודול - הבדלה.

כעת נמצא בסיס ל-M. לכל $i\in I$

נגדיר פונקציה $\delta_i: I\to A$ ע"י

$$\delta_i(j) := \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$ (דלתא של קרונקר)

התומך של δ_i סופי (בדיוק $\{i\}$),

כלומר $\delta_i\in M$. כעת, תהי $f\in M$,

כלומר $f: I\to A$ פונקציה עם תומך סופי.

נגדיר $a_i := f(i)\in A$. אז $\{a_i\}_{i\in I}$ אוסף

סופי של איברי A, מאונדקס ע"י I. ...

$\sum_{i\in I} a_i\delta_i \in M$ ...

לכל $j\in I$ ...

~~(ב3) לכל איבר מהקבוצה A^I יש ... $m = \{m_i\}$~~

~~... $n=m$ ... הפונקציה ... סופי ... כך ש-~~

~~$m = \sum_i n(i) e_i$~~

~~לכן $\{e_i\}_{i\in I}$ בסיס k M.~~

$$\left(\sum_{i\in I} a_i\delta_i\right)(j) = \sum_{i\in I} a_i\cdot\delta_i(j) = a_j = f(j)$$

לכן
$$\sum_{i\in I} a_i\delta_i = f$$

נניח שגם $\{b_i\}_{i\in I}$
שונים מאפס רק למספר סופי של אברי I כך ש-

$\sum_i b_i\delta_i = f$, צ"ל לכל j:

$$b_j = \sum_i b_i\delta_i(j) = \left(\sum_i b_i\delta_i\right)(j) = f(j) = a_j$$

כלומר $\{b_i\}=\{a_i\}$

לכן $\{\delta_i\}_{i\in I}$ בסיס של M

הגדרה: אם $m\in M$ ו- $\{m_i\}_{i\in I}$ בסיס של M, $\{a_i\}_{i\in I}$
ו- $m=\sum_i a_i m_i$, אז $\{a_i\}$ יקראו
הקואורדינטות של m (ביחס ל- $\{m_i\}$)

משפט (התכונה האוניברסלית של בסיס).

יהי A חוג עם יחידה, יהי M A-מודול,
תהי I קבוצה, ותהי $\{m_i\}_{i\in I}$ משפחה של איברי M המסומנת ע"י I.
התנאים הבאים שקולים:

(i) $\{m_i\}_{i\in I}$ בסיס של M.

(ii) יהי N A-מודול כלשהו, ויהי $\{n_i\}_{i\in I}$ אוסף כלשהו של איברי N המסומן ע"י I. אז יש הומומורפיזם יחיד של A-מודולים

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

כך ש- $\varphi(m_i) = n_i$ לכל i.

הוכחה.

(i) $\Leftarrow$ (ii): נגדיר הומו' φ באופן הבא.
ניקח $m \in M$. מאחר ש- $\{m_i\}_{i\in I}$ בסיס אז
קיים אוסף יחיד (סופי) $\{a_i\}_{i\in I}$ של איברי A, כך ש-
$m = \sum_i a_i m_i$ (סופי).

נגדיר $\varphi(m) := \sum_i a_i n_i \in N$. על פי היחידות מוגדרת היטב
$\varphi: M \to N$. נראה כי φ הומו':
ניקח $m, m' \in M$, לכן קיימים $\{a_i\}$ ו- $\{a'_i\}$ כך ש
$m + m' = \left(\sum_i a_i m_i\right) + \left(\sum_i a'_i m_i\right) = \sum_i (a_i + a'_i) m_i$

(5,1) ראשית, המקדמים של $m+m'$ הם

$\{a_i+a_i'\}_{i\in I}$ ולכן

$$\varphi(m+m') = \sum (a_i+a_i')n_i$$
$$= \left(\sum a_i n_i\right) + \left(\sum a_i' n_i\right) = \varphi(m)+\varphi(m').$$

באופן דומה מראים כי $\varphi(am)=a\cdot\varphi(m)$.

כעת, לכל i המקדמים של m_i

הם $\{a_j\}$, כאשר $a_i=1$ ו- $a_j=0$ לכל $j\neq i$.

לכן $\varphi(m_i)=\sum_j a_j n_j = n_i$

כלומר ההגדרה φ עונה על כל הדרישות.

נניח שקיימת עוד פונקציה כזו $\varphi':M\to N$

הרי $\varphi'(m_i)=n_i=\varphi(m_i)$ לכל i, ולכן

$\varphi'(m)=\varphi(m)$ לכל m $\Rightarrow$ $\varphi'=\varphi$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): יהי N ה-A מודול החופשי המתאים לקבוצה I. כלומר $N=\{h:I\to A$ כמעט כולן אפס $\}$

ויהי $\{\delta_i\}_{i\in I}$ הבסיס הרגיל שלו.

מתנאי (ii) קיים הומומורפיזם יחיד של מודולים $\varphi:M\to N$

כך ש- $\varphi(m_i)=\delta_i$

כעת נגדיר הומומורפיזם $\psi:N\to M$ ע"י

$\psi(h):=\sum_{i\in I} h(i)m_i \in M$. הסכום מוגדר היטב.

קל לראות כי ψ הוא הומומורפיזם.

מהי ההרכבה $\varphi\circ\psi: N\to N$? $\psi(\delta_i)=m_i$

$$\varphi\circ\psi(\delta_i)=\varphi(m_i)=\delta_i$$

ולכן כי לכל איברי הבסיס של N $\Rightarrow$ $\varphi\circ\psi = 1_N$

(4b) כלומר נראה ש- $\psi\circ\varphi$. לכל i,

$\varphi(m_i)=e_i \Leftarrow \psi\circ\varphi(m_i)=m_i$. מאחר ו- $\{m_i\}$

יוצרים את M $\Leftarrow$ $\psi\circ\varphi=1_M$

לכן $\varphi: M\to N$ איזו'.

מאחר ו- $\{e_i\}$ בסיס של N $\Leftarrow$ $\{m_i\}$ בסיס

של M. ∎

[illegible]

~~[illegible]~~

יהי A חוג קומוטטיבי.

יהי $n\geq 0$. חוג הפולינומים ב- n משתנים

מעל A מוגדר כך: יהי I הקבוצה

$\mathbb{N}^n=I$. כלומר ה-n-יות של מספרים טבעיים.

נגדיר את B להיות האוסף הבא

מעל A על בסיס I כלומר איברי B

הם פונקציות עם תומך סופי. $f: I\to A$

לכל $(i_1,\dots,i_n)\in I$ נסמן ב- $x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$

את הפונקציה $f_{(i_1,\dots,i_n)}: I\to A$ שהגדרנו קודם לכן.

אז הקבוצה $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\}_{(i_1,\dots,i_n)\in I}$ היא בסיס של B

איברי ה- B נקראים פולינומים. איבר

של B ב- $f(x_1,\dots,x_n)$. נסמן $1_B:=x_1^0\cdots x_n^0$

תרגיל: הוכיחו כי על B ישנו מבנה יחיד

של A-אלגברה קומוטטיבית עם איבר יחידה 1_B,

כך שהכפל מקיים

$$(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})\cdot(x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}) = x_1^{i_1+j_1}\cdots x_n^{i_n+j_n}$$

סוף של התרגיל:

את חוג הפולינומים $A[x_1,\dots,x_n]$

אפשר להגדיר רקורסיבית: כל מה שצריך לזה זה הגדרה של $A[X]$,

$A_0 := A$, $A_1 := A[x_1]$, ..., $A_{i+1} := A_i[x_{i+1}]$.

$$A[x_1,\dots,x_n] := A_n$$

להוכיח (ב) ⇐ A מודול $A[x_1,\dots,x_n]$ הוא חופשי, עם בסיס $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\}_{i_1,\dots,i_n\geq 0}$

עם $(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n})\cdot(x_1^{j_1}\cdots x_n^{j_n}) = x_1^{i_1+j_1}\cdots x_n^{i_n+j_n}$

משפט: יהי A חוג קומוטטיבי. תהי B A-אלגברה קומוטטיבית, ותהי $(b_1,\dots,b_n)$ סדרה של איברים ב- B. אז יש הומומורפיזם יחיד של A-אלגברות

$$\varphi: A[x_1,\dots,x_n] \to B$$

כך ש- $\varphi(x_i) = b_i$ לכל i.

הוכחה

קיום: מאחר ש- $A[x_1,\dots,x_n]$ הוא A מודול חופשי, עם בסיס $\{x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}\}_{(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n}$, הרי יש הומומורפיזם יחיד של A-מודולים

$$\varphi: A[x_1,\dots,x_n] \to B$$

כך ש- $\varphi(x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}) = b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n}$ לכל $(i_1,\dots,i_n)\in\mathbb{N}^n$.

(8,ב)

נוכיח כי φ הומומורפיזם של A אלגברות

כלומר: (i) $\varphi(f+g)=\varphi(f)+\varphi(g)$

הוא: חוגים

(ii) $\varphi(f\cdot g)=\varphi(f)\cdot\varphi(g)$

(iii) $\varphi(1)=1_B$

(iv) $\varphi(af)=a\cdot\varphi(f)$

לא צריך (i) ו- (iv) כבר הוכחנו, כי φ הוא הומ' של A-מודולים.

עבור (iii): $\varphi(1)=\varphi(x_1^0\cdots x_n^0)=b_1^0\cdots b_n^0=1_B$ ✓

עבור (ii): נניח

$$f(x)=\sum_i a_i x^i$$

$$g(x)=\sum_j c_j x^j \qquad a_i, c_j\in A$$

אז

$$f(x)\cdot g(x)=\left(\sum_i a_i x^i\right)\left(\sum_j c_j x^j\right)$$

$$=\sum_{i,j} a_i c_j x^{i+j}$$

$$\varphi(f(x)\cdot g(x))=\varphi\left(\sum_{i,j} a_i c_j x^{i+j}\right)$$

$$=\sum_{i,j} a_i c_j b^{i+j}$$

$$=\left(\sum_i a_i b^i\right)\cdot\left(\sum_j c_j b^j\right)=\varphi(f(x))\cdot\varphi(g(x))$$

יחידות: יהי $\psi:A[x]\to B$ הומ' של A-אלגברות כך ש- $\psi(x_i)=b_i$ אז

$$\psi(f(x))=\psi\left(\sum_i a_i x^i\right)=\sum_i a_i \psi(x_1)^{i_1}\cdots\psi(x_n)^{i_n}=$$

$$\sum_i a_i b^i=\varphi(f(x))$$

Δ

טענה: יהי A כזה, ויהיו $a_1,\dots,a_n \in A$

יהי $\mathfrak{b} \subset k[x_1,\dots,x_n] = B$ האידיאל

$\mathfrak{b} := (x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$, האידיאל הנוצר ע"י x_i-a_i

אז ההעתקה הטבעית $A \to B/\mathfrak{b}$ היא איזומורפיזם

הוכחה: נתבונן בהצבה של A
$\varphi: B \to A$, $\varphi(x_i) = a_i$.

מאחר ו- $\varphi(x_i-a_i)=0$ הרי $\mathfrak{b} \subseteq \ker(\varphi)$
ולכן φ משרה העתקה $\bar\varphi : \bar B = \frac{B}{\mathfrak{b}} \to A$.
נסמן כי $\bar b := b+\mathfrak{b}$
כמו כן נסמן ב- ψ את ההעתקה הטבעית
$\psi: A \to B/\mathfrak{b}$. ברור כי $\bar\varphi \circ \psi = 1_A$; לכן ψ חח"ע
ועל: $\bar x_i = \bar a_i = \psi(a_i)$ לכל i, ...
$\bar b \in \bar B$. אז $\bar b = f(x)+\mathfrak{b}$ עבור פולינום $f(x)$,
כלומר $\bar b = f(\bar x_1,\dots,\bar x_n) = f(\bar a_1,\dots,\bar a_n) \in \psi(A)$ ולכן ψ על. □

סוף פר' 6.6

מסקנה: יהי k שדה, $B = k[x_1,\dots,x_n]$,
$\lambda_1,\dots,\lambda_n \in k$ ו- $\mathfrak{m} := (x_1-\lambda_1,\dots,x_n-\lambda_n)$
אז $\mathfrak{m}$ אידיאל מקסימלי.

משפט האפסים של הילברט: יהי k שדה סגור אלגברית, אז כל אידיאל מקסימלי של $k[x]$ הוא מהצורה הנ"ל.