49.9

עוד הערה על פולינומים

יהי $f(\underline{x}) = f(x_1,\dots,x_n) \in A[\underline{x}]$

פולינום עם מקדמים ב-A. תהי B A-אלגברה

קומוטטיבית, ותהי $\underline{b}=(b_1,\dots,b_n)$

סדרת איברים ב-B. ההצבה של $\underline{b}$ לתוך

$f(\underline{x})$ היא האיבר $f(\underline{b}) \in B$ המוגדר כך:

נכתוב

$$f(\underline{x}) = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}\, \underline{x}^{\underline{i}}$$

כאשר $\{a_{\underline{i}}\}_{\underline{i}\in\mathbb{N}^n}$ אוסף כמעט סופי של איברי A.

אז

$$f(\underline{b}) := \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}}\, \underline{b}^{\underline{i}} := \sum_{\underline{i}=(i_1,\dots,i_n)} a_{\underline{i}}\, b_1^{i_1}\cdots b_n^{i_n} \in B$$

(סופי)

[illegible] הסכום [illegible] גם:

טענה: יהי הומו' של A-אלגברות

$\varphi: A[\underline{x}] \to B$, נגדיר

$$\underline{b}=(b_1,\dots,b_n) := (\varphi(x_1),\dots,\varphi(x_n))$$

יהי $f(\underline{x}) \in A[\underline{x}]$. אז

$$\varphi(f(\underline{x})) = f(\underline{b}).$$

אז כל הומו' $\varphi: A[\underline{x}] \to B$ הוא מהצורה הצבה

$\underline{x}\mapsto\underline{b}$

מכפלות טנזוריות (מעל חוג קומוטטיבי)

העתקות בילינאריות

נניח A חוג קומוטטיבי.

הגדרה יהיו L, N, M מודולים מעל A.
העתקה $\beta: M \times N \to L$ נקראת A-בילינארית
אם

$$\beta(m_1+m_2, n) = \beta(m_1,n) + \beta(m_2,n)$$

$$\beta(m, n_1+n_2) = \beta(m,n_1) + \beta(m,n_2)$$

$$\beta(am, n) = \beta(m, an) = a \cdot \beta(m,n)$$

לכל $a \in A$, $m, m_1, m_2 \in M$ ו- $n, n_1, n_2 \in N$

דוגמאות (1) תהי B A-אלגברה (לאו דווקא קומוטטיבית)
אז על A $\beta: B \times B \to B$, $\beta(b_1,b_2) = b_1 \cdot b_2$
היא העתקה בילינארית

(2) יהי M A-מודול. נסמן

$$M^* := Hom_A(M, A)$$

אז $\beta: M \times M^* \to A$

$$\beta(m, \varphi) = \varphi(m)$$

היא בילינארית.

(3) יהי $M_n(A)$ חוג המטריצות, נסמן
$\beta: M_n(A) \times M_n(A) \to A$, $\beta(f,g) := tr(f \cdot g)$
זו כן בילינארית

דוג' (4) נניח $\beta: M\times N\to \underline{P}$ בילינארית

ו- $\varphi: \underline{P}\to Q$ לינארית (= הומ' של A-מודולים). אז

$\varphi\circ\beta: M\times N\to Q$ בילינארית

(5) V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{R}$, ו- β תבנית בילינארית (סימטרית). מכפלה פנימית הכל מין התבניות הללו

הגדרה יהיו M ו- N שני A-מודולים. מכפלה טנזורית (tensor product) של M ו- N הוא A-מודול $\underline{P}$, יחד עם העתקה A-בילינארית $\beta: M\times N\to \underline{P}$, אשר יש להן התכונה הבאה (תכונה האוניברסלית):

(*) יהי $\underline{P}'$ A-מודול כלשהו, ותהי $\beta': M\times N\to \underline{P}'$ העתקה בילינארית כלשהי. אז יש הומ' יחיד של A-מודולים $\varphi: \underline{P}\to \underline{P}'$ כך ש- $\beta'(m,n)=\varphi(\beta(m,n))$ לכל $m\in M$ ו- $n\in N$.

כדיאגרמה:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "\beta'"'] & \underline{P} \arrow[d, dotted, "\exists!\,\varphi"] \\ & \underline{P}' \end{tikzcd}$$

משפט: יהיו M ו-N A-מודולים.
המכפלה הטנזורית (T,β) היא יחידה (עד
כדי איזומורפיזם), כלומר, אם (T',β')
מכפלה טנזורית של M ו-N, אז יש
איזומורפיזם יחיד $\varphi: T\to T'$ של A-מודולים
כך ש- $\beta'=\varphi\circ\beta$

הוכחה: מהתכונה האוני' של (T,β) יש
הומ' יחיד $\varphi: T\to T'$ כך ש- $\beta'=\varphi\circ\beta$
צ"ל כי φ איזו'.
מהתכונה האוני' של (T',β') יש

הומ' $\psi: T'\to T$ כך ש- $\beta=\psi\circ\beta'$

כעת שני ההומ' $T\to T$: $\psi\circ\varphi$, 1_T

מקיימים $\beta=1_T\circ\beta$

ו- $\beta=(\psi\circ\varphi)\circ\beta$.

לכן מהיחידות נקבל ש- $\psi\circ\varphi=1_T$

בדומה $\varphi\circ\psi=1_{T'}$ לכן φ איזו'!

$\square$

(53)

~~משפט~~ **משפט.** יהי A חוג קומ' ויהי

M ו-N שני A-מודולים. אז המכפלה הטנזורית

(P, p) של M ו-N קיימת.

הוכחה. תהי I הקבוצה $I := M \times N$.

יהי $\tilde{P}$ ה-A-מודול החופשי על בסיס, $\{\tilde{p}_i\}_{i \in I}$

המאונדקס ע"י I.

לכל $m_1, m_2 \in M$ ו-$n \in N$ יש איבר

(R1) $$\tilde{p}_{(m_1+m_2, n)} - \tilde{p}_{(m_1, n)} - \tilde{p}_{(m_2, n)} \in \tilde{P}$$

לכל $m \in M$ ו-$n_1, n_2 \in N$ יש איבר

(R2) $$\tilde{p}_{(m, n_1+n_2)} - \tilde{p}_{(m, n_1)} - \tilde{p}_{(m, n_2)} \in \tilde{P}$$

לכל $m \in M$, $n \in N$ ו-$a \in A$ יש

איברים

(R3) $$\tilde{p}_{(am, n)} - a \cdot \tilde{p}_{(m, n)} \in \tilde{P}$$

(R4) $$\tilde{p}_{(m, an)} - a \cdot \tilde{p}_{(m, n)} \in \tilde{P}$$

איברים מהצורה R1,…,R4 נקראים יחסים.

יהי $\tilde{R}$ תת A-מודול של $\tilde{P}$ הנוצר ע"י כל

האיברים מהצורה R1,…,R4. נגדיר A-מודול:

$$\boxed{P := \tilde{P} / \tilde{R}}$$

ופונקציה

$$\boxed{\begin{aligned} p: M \times N &\to P \\ (m, n) &\mapsto \tilde{p}_{(m,n)} + \tilde{R} \end{aligned}}$$

ניקח $\{m_1, m_2\} \subseteq M$, $n \in N$

התכונה נובעת כי β הינה דו-ליניארית

העובדה שהאיבר מהצורה R1 שייך ל- $\tilde{R}$

אומרת כי

$$\beta(m_1+m_2,n) = \tilde{p}_{(m_1+m_2,n)} + \tilde{R}$$

$$= \tilde{p}_{(m_1,n)} + \tilde{p}_{(m_2,n)} + \tilde{R}$$

$$= \beta(m_1,n) + \beta(m_2,n)$$

באופן דומה מוכיחים R_2, R_3, R_4 שתכונות לגבי הליניאריות של β דו-ליניארית

כעת יהי Q A-מודול כלשהו,

ויהי $\gamma : M \times N \to Q$ פ' דו-ליניארית

אז יש הומ' (יחיד) של A-מודולים

$$\tilde{\varphi} : \tilde{P} \to Q$$

כך ש- $\tilde{\varphi}(\tilde{p}_{(m,n)}) = \gamma(m,n)$

לכל $(m,n) \in M \times N$ (כי ההעתקה הזאת על מודול חופשי)

נבדוק שהיא מכבדת R_1. אז:

$$\tilde{\varphi}\left(\tilde{p}_{(m_1+m_2,n)} - \tilde{p}_{(m_1,n)} - \tilde{p}_{(m_2,n)}\right) =$$

$$\tilde{\varphi}\left(\gamma(m_1+m_2,n) - \gamma(m_1,n) - \gamma(m_2,n)\right)$$

$$= \tilde{\varphi}\left(\left(\gamma(m_1,n) + \gamma(m_2,n)\right) - \gamma(m_1,n) - \gamma(m_2,n)\right)$$

$$= 0$$

באופן דומה לגבי היחסים האחרים, לכן $\tilde{\varphi}(\tilde{R}) = 0$,

ויש קיים הומ' מושרה $\varphi : P = \tilde{P}/\tilde{R} \to Q$.

ונקבל כי $(\varphi \circ \beta)(m,n) = \tilde{\varphi}(\tilde{p}_{(m,n)}) = \gamma(m,n)$

לכן $\boxed{\varphi \circ \beta = \gamma}$

נניח $\varphi': P \to Q$ הוא עוד הומ. כך ש $\gamma = \varphi' \circ \beta$ *

(25) ובגלל ש β יוצר של P כ- A מודול

כאשר β ההטלה $\beta(m,n) = \rho_{(m,n)} + \bar{R}$,

הרי בהגדרה ש- $\varphi'(\beta(m,n)) = \gamma(m,n)$
$= \varphi(\beta(m,n))$

ולכן: $\varphi' = \varphi$ □

11.6

שימו לב: כאשר אין ספק במכפלה הטנזורית (P, β) של M ו-N (נשמור על כך שזה יחיד)

נסמן $P =: M \otimes_A N$ ו- $m \otimes n := \beta(m,n)$.

טענה: נניח $\{m_i\}_{i \in I}$ מערכת יוצרת של M כ- A מודול, ו- $\{n_j\}_{j \in J}$ מערכת יוצרת של N כ- A מודול אזי המערכת $\{m_i \otimes n_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ יוצרת את $M \otimes_A N$ כ- A מודול.

הוכחה: מהלמה הקודמת ידוע לנו ש $M \otimes_A N$ נוצר ע"י הטנזורים הפשוטים $m \otimes n$ (המתאימים לזוגות (m,n) ב- $M \times N$), ולכן מספיק להראות

$m = \sum_{i \in I} a_i m_i$ ו- $n = \sum_{j \in J} b_j n_j$

כאשר רק מספר סופי (של האיברים שונים מאפס) $\{a_i\}_{i \in I}$ ו- $\{b_j\}_{j \in J}$ ב- A מקדמים

$$m\otimes n = \Big(\sum_{i\in I} a_i m_i\Big)\otimes\Big(\sum_{j\in J} b_j n_j\Big) = \sum_{i,j} a_i b_j\,(m_i\otimes n_j)$$

(צריך שהצגה של $\{a_i b_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ כמעט סופי !)

□

תרגילים [כאשר $A\neq 0$]

① ~~נניח M ו- N מודולים חופשיים עם בסיסים $\{m_i\}_{i\in I}$ ו- $\{n_j\}_{j\in J}$. להוכיח כי $M\otimes_A N$ חופשי, עם בסיס $\{m_i\otimes n_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ (אין זה קשה, אפשר להניח כי הקבוצות I ו- J סופיות)~~

לא להגיש

③ (*סופי) k שדה, V k-מודול נוצר סופית. להוכיח: ע"פ $V\otimes_k V^*$
מצאו ביטוי מפורש של הרכבה של ~~ההעתקה~~ $\psi(u)$ ב- 1, כאשר ψ מתוארת ב- 1, 2 (האופרטור)

② יהי M A-מודול חופשי עם בסיס $\{m_i\}_{i\in I}$. נניח כי $|I|<\infty$ (זה חשוב!)

להוכיח כי $M^* := Hom_A(M,A)$ חופשי, עם בסיס $\{\varphi_i\}_{i\in I}$, כאשר $\varphi_i\in M^*$ הינו "הבסיס הדואלי"

היחיד המקיים $\varphi_i(m_j) = \begin{cases} 1 ; & i=j \\ 0 ; & i\neq j \end{cases}$

④ יהי M המודול החופשי מדרגה סופית. להוכיח כי ψ איזומ' יחיד של A-מודולים

רמז: תרגיל 2

$\psi: M\otimes_A M^* \to Hom_A(M,M) = End_A(M)$ רק ש-

$\psi(m\otimes\varphi)(m') = \varphi(m')\cdot m$

לכל $m,m'\in M$ ו- $\varphi\in M^*$

עוד תוצאה: יהי K שדה ו- V,W שני K-מרחבים, ממימדים סופיים. אז מתקיים השוויון: | ונסמן $\mathrm{rank}_K V = m$, $\mathrm{rank}_K W = n$

$$\mathrm{rank}_K(V\otimes_K W) \leq m\cdot n$$

הוכחה: יהיו $\{v_i\}_{i=1}^{m}$ ו- $\{w_j\}_{j=1}^{n}$ בסיסים, הרי הראינו ש- $\{v_i\otimes w_j\}$ יוצר.
אך מדוע $V\otimes_K W$ הוא לא אפס?

מסקנה: יהי M A-מודול חופשי עם בסיס $\{m_i\}_{i\in I}$, ויהי N A-מודול חופשי עם בסיס $\{n_j\}_{j\in J}$. אזי ה-A-מודול $M\otimes_A N$ חופשי, והאוסף $\{m_i\otimes n_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ הינו בסיס של $M\otimes_A N$.

הוכחה: נשתמש בתכונה האוניברסלית של בסיס. יהי P A-מודול כלשהו, ויהי $\{p_{ij}\}_{(i,j)\in I\times J}$ אוסף של איברי P הממוספר ע"י הקבוצה $I\times J$. די שיש הומומורפיזם יחיד של A-מודולים

$$\varphi: M\otimes_A N \to P$$

כך ש- $\varphi(m_i\otimes n_j)=p_{ij}$ לכל (i,j).

מאחר שהאוסף $\{m_i\otimes n_j\}_{(i,j)\in I\times J}$ יוצר את $M\otimes_A N$ כ-A-מודול (עם הבנייה הקודמת), הרי יש לכל היותר הומומורפיזם אחד כזה.