פבה 24
13.6

S8 ניקח להוכחה דומה.

ניקח איבר $(m,n)\in M\times N$

יהי $\{a_i\}_{i\in I}$ אוסף המקדמים של m ביחס

לבסיס $\{m_i\}_{i\in I}$; כלומר $\{a_i\}$ אוסף כמעט

סופי של איברי A, ו- $m=\sum_i a_i m_i$

בדומה יהי $\{b_j\}_{j\in J}$ אוסף המקדמים של n

ביחס לבסיס $\{n_j\}_{j\in J}$ נגדיר

$$\beta(m,n) := \sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j p_{ij} \in P$$

זה נכון כי האוסף $\{a_i b_j\}$ כמעט סופי.

מקבלים פונקציה $\beta: M\times N \to P$.

בדיקה קלה (תרגיל) מראה ש- β פונקציה בילינארית. לכן יש פונקציה לינארית (הומומורפיזם)

$$\varphi: M\otimes_A N \to P$$

כך ש- $\varphi(m\otimes n)=\beta(m,n)$

בפרט $\varphi(m_i\otimes n_j)=\beta(m_i,n_j)=p_{ij}$

$\square$

קטגוריות ופונקטורים
(Categories & Functors)

הנושא הזה שייך רק לאלגברה בלבד –
מאחד המושגים רבים הקשורים בתחומים במתמטיקה
בטופולוגיה האלגברית (והגדרות של אלגברה
ועוסקים דומה במאה ה-20).

השפה של קטגוריות ופונקטורים היא
יותר כללית, קשה לבנות הכל גדול מתמטי
הביטוי המתמטי אלגברית, טופולוגיה אלגברית
ועוד.

תחילה נזכיר מושגים בסיסיים בתורת
(sets & classes) תורת הקבוצות
כל דבר שניתן להגדיר בשפה של תורת הקבוצות
נקרא מחלקה. לא כל מחלקה היא קבוצה
הפרדוקס של ראסל מראה שאוסף (הסדורים) של הקבוצות
דוגמאות...) החלק העיקרי הוא שכל מחלקה (הרי אחרת
היא קבוצה), אלא להיות קבוצה. אם X היא
מחלקה ו- $X\in Y$ אז X קבוצה.

לדוגמא, מחלקת כל הקבוצות היא מחלקה אבל
(ראסל אינה קבוצה).

הגדרה. קטגוריה $\underline{C}$ היא המבנה הבא:

א. מחלקה $ob\,\underline{C}$, הנקראת מחלקת האובייקטים
של $\underline{C}$.

ב. לכל זוג אובייקטים $X,Y\in ob\,\underline{C}$ ישנה
קבוצה $Hom_{\underline{C}}(X,Y)$, הנקראת קבוצת המורפיזמים
מ- X ל- Y.

(60)

3. לכל שלושה אובייקטים $X,Y,Z \in ob\,\underline{C}$

יש פעולת הרכבה $\circ : Hom_{\underline{C}}(X,Y) \times Hom_{\underline{C}}(Y,Z) \to Hom_{\underline{C}}(X,Z)$

• האקסיומות: הרכבה

(I) אסוציאטיביות: נניח $C_0, C_1, C_2, C_3 \in ob\,\underline{C}$ ו-

$f_i \in Hom_{\underline{C}}(C_{i-1}, C_i)$ עבור $i=1,2,3$ אז:

$$f_3 \circ (f_2 \circ f_1) = (f_3 \circ f_2) \circ f_1$$

$$C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \xrightarrow{f_2} C_2 \xrightarrow{f_3} C_3$$

(II) קיום איבר יחידה: לכל $C \in ob\,\underline{C}$ קיים מורפיזם $1_C \in Hom_C(C,C)$ כך שלכל $f \in Hom_{\underline{C}}(C,C')$ ו- $g \in Hom_{\underline{C}}(C',C)$ מתקיים $f \circ 1_C = f$ ו- $1_C \circ g = g$

18.6

תרגיל: המורפיזם 1_C של אובייקט C יחיד

סימון: אם $f \in Hom_{\underline{C}}(C_1, C_2)$ נסמן $f: C_1 \to C_2$.

דוגמאות

(1) הקטגוריה $\underline{Set}$ של קבוצות. מחלקת האובייקטים $ob\,\underline{Set}$ היא מחלקת כל הקבוצות, כי מחלקה זו.
מורפיזמים $f \in Hom_{\underline{Set}}(S,T)$ הן פונקציות $f: S \to T$. ההרכבה היא הרכבת פונקציות.

המורפיזם $\mathbb{1}_S$ הוא פונקציית הזהות
$\mathbb{1}_S : S \to S$, $\mathbb{1}_S(s) = s$.

(2) הקטגוריה $\underline{Set}_f$ של קבוצות סופיות. זוהי תת-קטגוריה מלאה של $\underline{Set}$: $ob\,\underline{Set}_f \subset ob\,\underline{Set}$
ועבור $S,T \in ob\,\underline{Set}_f$ מתקיים
$$Hom_{\underline{Set}_f}(S,T) = Hom_{\underline{Set}}(S,T).$$

(3) לכל $n \geq 0$ נגדיר $T_n := \{1,2,\dots,n\} \subset \mathbb{N}$
כלומר, $T_0 = \emptyset$, $T_1 = \{1\}$, וכו'.
נגדיר קטגוריה $\underline{C}$ כך: זוהי תת-הקטגוריה המלאה של $\underline{Set}_f$ כך ש: $ob\,\underline{C} := \{T_0, T_1, \dots\}$

נעיר לך כי המחלקה $ob\,\underline{C}$ היא קבוצה
([illegible]), בניגוד ל- $ob\,\underline{Set}$ ול- $ob\,\underline{Set}_f$

הגדרה תהי $\underline{C}$ קטגוריה. מורפיזם $f: C \to D$ נקרא איזומורפיזם אם יש לו מורפיזם $g: D \to C$
כך ש- $f \circ g = \mathbb{1}_C$ ו- $g \circ f = \mathbb{1}_D$

תרגיל (1) להוכיח כי אם $f: C \to D$ איזומורפיזם אז
המורפיזם g שהגדרנו הוא יחיד.

תרגיל 2 יהי $c \in ob\,\underline{C}$. נגדיר

$$Aut_{\underline{C}}(c) := \{ \text{אוטומורפיזמים } f: c \to c \} \subset Hom_{\underline{C}}(c,c)$$

להוכיח כי $Aut_{\underline{C}}(c)$ חבורה תחת פעולת ההרכבה, עם היחידה 1_c.

3 תאר את החבורה $Aut_{\underline{Set}_f}(S)$ עבור כל $S \in ob\,\underline{Set}_f$

בתרגילים 2-3 קיבלת הבנה הבאה: כל אוביקט $S \in ob\,\underline{Set}_f$ איזומורפי לאוביקט (יחיד) $S' \in ob\,\underline{C}$. כלומר איזומורפי, אבל לא יחיד. אנחנו רואים שהקטגוריה $\underline{C}$ "עצמה" של "כל הסיבוכיות" של $\underline{Set}_f$.

הביטוי המדויק הוא: $\underline{C}$ שקולה ל- $\underline{Set}_f$

(נלמד בהמשך לגבי מה שקילות קטגוריות)

עוד דוגמאות

4 יהי A חוג קומוטטיבי. הקטגוריה $\underline{Mod}\,A$ היא זו: האובייקטים הם כל ה-A-מודולים, ולכל $M,N \in \underline{Mod}\,A$, נגדיר את המורפיזמים

$$Hom_{\underline{Mod}\,A}(M,N) := Hom_A(M,N)$$

ההרכבה היא הרכבת הומומורפיזמים ו- מה היחידה?

5 כמו ב-4, נגדיר את $\underline{Mod}_f\,A$ שהיא תת-הקטגוריה המלאה של המודולים הנוצרים סופית.

6) הקטגוריה **Ab** היא תת קט' של החבורות האבליות. אז $\mathbf{Ab} = \mathbf{Mod}\ \mathbb{Z}$.

7) הקטגוריה **Grp** של כל החבורות.

נוכיח כי **Ab** היא תת קטגוריה מלאה של **Grp**

8) הקטגוריה **Top** של כל המרחבים הטופולוגיים, המורפיזמים הם ההעתקות הרציפות.

9) נגדיר קטגוריה $\underline{C}$ כך: האובייקטים הם קבוצות פתוחות $X \subseteq \mathbb{R}$. המורפיזמים הם פונקציות גזירות ∞ פעמים $f: X \to Y$

10) תהי G חבורה. נגדיר קטגוריה $\underline{C}$ כך:

יש אובייקט יחיד, נסמן x ו-

$\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(x,x) := G$,

אז כל הרכבה היא הכפל ב-G, ואיבר היחידה 1 הוא 1_x [illegible]

11) תהי $(X, \leq)$ קבוצה סדורה חלקית. נגדיר קטגוריה $\underline{C}$ כך: $\mathrm{Ob}\,\underline{C} := X$. אם $x, y \in X$ אומרים $x \leq y$ אז נגדיר $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(x,y) = \{1\}$, ואחרת $\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(x,y) = \emptyset$. זו קטגוריה.

תרגיל: תהי $\underline{C}$ קטגוריה קטנה (כלומר $\mathrm{Ob}\,\underline{C}$ קבוצה) כך ש- $|\mathrm{Hom}_{\underline{C}}(x,y)| \leq 1$ לכל $x, y \in \mathrm{Ob}\,\underline{C}$. נגדיר $\leq$ על $\mathrm{Ob}\,\underline{C} = X$: נגדיר $x \leq y$ אם $\mathrm{Hom}(x,y) \neq \emptyset$. הראו ש-$(X, \leq)$ סדורה חלקית.

דוגמה נוספת [illegible] הבסיס של ההומולוגיה

$H_n: \mathbf{Top} \to \mathbf{Ab}$ [illegible]

$H_n(S^2) = \mathbb{Z}$