הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה
אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
Department of Mathematics

בחינה בקורס יסודות האנליזה להנדסת חשמל 1, תאריך 01.03.2020, מועד ב'
מספר הקורס: 201-2-5331
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

Exam in the course: Fundamentals of Analysis for EE-1, date: 01.03.2020
Course number: 201-2-5331
Lecturer: Prof Arkady Leiderman

- משך הבחינה: 3 שעות.
- חומר עזר המותר: 2 דפי רשימות בגודל סטנדרטי A4. **אין להשתמש מחשבון.**
- יש לענות על כל 4 שאלות. משקל של כל שאלה/סעיף רשום בשאלון.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם! <u>אף שאלה בשאלון לא דורשת פתרון ארוך או מסובך</u>.
- אפשר להשתמש **ללא הוכחה** בכל טענה שנלמדה בשיעורים או בעבודות בית.
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע / לא יודעת"** ולקבל 20% מהנקודות של שאלה/סעיף (פרט לשאלה 3 ג').
- שאלות/סעיפים בהם עניתם "לא יודע/ת" לא ייבדקו.

- Duration of exam: 3 hours.
- Tools for help: it is allowed to bring two lists (standard size A4) of notes written by a student.
  The use of a calculator is not allowed.
- Please give answers to all 4 questions. The grade of each question / paragraph is clearly indicated.
- Please explain in details the solutions! <u>No question below requires a long and complicated proof.</u>
- You can use **without proof** any claim, which was proved in the lectures or in the home-works.
- Instead of presenting a solution of any question / paragraph you can write **"I don't know"**.
  Then you will obtain 20% of the grade of that question / paragraph (except for the question 3(c)).
- Question / paragraph where "I don't know" is answered, will not be checked.

N of exam____________

שאלה 1

תהי X קבוצה של כל סדרות של מספרים ממשיים שמתכנסות לאפס:

$$x=\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}\in X \iff \lim_{n\to\infty} x(n)=0$$

לכל שני איברים $x=\{x(n)\}_{n=1}^{\infty}, y=\{y(n)\}_{n=1}^{\infty}\in X$ נגדיר $d(x,y)=\max\{|x(n)-y(n)|: n\in N\}$

(א) (10 נקודות) הוכיחו כי d מגדירה מטריקה בקבוצה X.

(ב) (15 נקודות) נתבונן בסדרה $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ של איברים ב X, באשר כל איבר $e_i=\{e_i(n)\}_{n=1}^{\infty}\in X$ מוגדר באופן הבא:

$e_i(n)=1$ אם $n=i$ ו- $e_i(n)=0$ אם $n\neq i$. הוכיחו כי סדרה $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ לא מתכנסת ב- (X,d).

האם כדור היחידה הסגור במרחב מטרי (X,d) הוא קבוצה קומפקטית?

שאלה 2

(25 נקודות) יהי (X,d) מרחב מטרי כלשהו ונניח כי $K\subset X$ קבוצה קומפקטית.

נקבע נקודה $a\in X$ כלשהי. הוכיחו כי קיימת נקודה $p\in K$ כך ש- $d(a,p)=\max\{d(a,x): x\in K\}$.

שאלה 3

תהי $E\subset[a,b]$ קבוצה מדידת Lebesgue כלשהי. μ מסמן מידת Lebesgue ב- R.

(א) (25 נקודות) לכל $0\le x\le \frac{b-a}{2}$ נגדיר קבוצה $E_x=E\cap[a+x,b-x]$.

הוכיחו כי לכל מספר $0\le c\le 1$ קיים x כך ש- $\mu(E_x)=c\mu(E)$.

(ב) (10 נקודות -בונוס) הוכיחו כי קיימת קבוצה קומפקטית K כך ש- $K\subset E$ ו- $\mu(K)=\frac{1}{2}\mu(E)$.

שאלה 4

תהי $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של תתי-קבוצות סופיות של קטע $[a,b]$.

נגדיר פונקציות $f_n(x):[a,b]\to R$ באופן הבא: אם $x\in A_n$ אז $f_n(x)=1$, אחרת $f_n(x)=0$.

(א) (10 נקודות) הוכיחו כי כל פונקציה $f_n(x)$ אינטגרבילית לפי Riemann בקטע $[a,b]$.

(ב) (15 נקודות) נניח כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ לכל $x\in[a,b]$.

האם פונקציה $f(x)$ בהכרח אינטגרבילית לפי Riemann בקטע $[a,b]$?

אם התשובה היא "כן" מהו הערך של אינטגרל Riemann $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$?

האם פונקציה $f(x)$ בהכרח אינטגרבילית לפי Lebesgue בקטע $[a,b]$?

אם התשובה היא "כן" מהו הערך של אינטגרל Lebesgue $\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu$? יש לנמק תשובתכם.

בהצלחה!

Question 1.

Let X be the set consisting of all sequences of real numbers converging to zero:

$x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty} \in X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x(n) = 0$.

For each two elements $x = \{x(n)\}_{n=1}^{\infty}, y = \{y(n)\}_{n=1}^{\infty} \in X$ define $d(x,y) = \max\{|x(n) - y(n)| : n \in N\}$.

(a) (10 points) Prove that d defines a metric on the set X.

(b) (15 points) Consider the sequence of elements $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ in X, where each $e_i = \{e_i(n)\}_{n=1}^{\infty} \in X$ is defined as follows: $e_i(n) = 1$ if $n = i$, and $e_i(n) = 0$ if $n \neq i$.

Prove that the sequence $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ does not converge in (X,d).

Is the closed unit ball in the metric space (X,d) a compact set?

Question 2.

(25 points) Let (X,d) be any metric space and suppose that $K \subset X$ is a compact subset.

Fix any point $a \in X$. Prove that there exists a point $p \in K$ such that $d(a,p) = \max\{d(a,x) : x \in K\}$.

Question 3.

Let $E \subset [a,b]$ be any Lebesgue measurable set. μ denotes the Lebesgue measure in R.

(a) (25 points) For all $0 \leq x \leq \frac{b-a}{2}$ define the set $E_x = E \cap [a+x, b-x]$.

Prove that for every number $0 \leq c \leq 1$ there is x such that $\mu(E_x) = c\mu(E)$.

(b) (10 points - bonus) Prove that there exists a compact set K such that $K \subset E$ and $\mu(K) = \frac{1}{2}\mu(E)$.

Question 4.

Let $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of finite subsets of the segment $[a,b]$.

Define functions $f_n(x) : [a,b] \to R$ as follows: if $x \in A_n$ then $f_n(x) = 1$, otherwise $f_n(x) = 0$.

(a) (10 points) Prove that every function $f_n(x)$ is Riemann integrable on the segment $[a,b]$.

(b) (15 points) Suppose that $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ for every $x \in [a,b]$.

Is $f(x)$ necessarily a Riemann integrable function on the segment $[a,b]$?

If the answer is "yes" what is the value of the Riemann integral $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$?

Is $f(x)$ necessarily a Lebesgue integrable function on the segment $[a,b]$?

If the answer is "yes" what is the value of the Lebesgue integral $\int_{[a,b]} f(x)\,d\mu$?

Provide an argument to your answers.

Good luck!

01.03.2020