

בחינה בקורס יסודות האנליזה להנדסת חשמל 1, תאריך 22.02.2019, מועד ב'  
מספר הקורס: 201-2-5331  
המרצה: ד"ר ארקדי לייזרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על כל 4 שאלות. משקל של כל שאלה הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- חומר עזר המותר: 2 דפי רשימות בגודל סטנדרטי A4. **אין מחשבון.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "לא יודע" ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן \_\_\_\_\_

### שאלה 1

- נניח כי  $d_1, d_2, \dots, d_n$  הן  $n$  מטריקות באותה קבוצה  $X \neq \emptyset$ .  
נגדיר  $d(x, y) = \max\{d_i(x, y) : i = 1, \dots, n\}$  לכל  $x, y \in X$ .  
(א) (10 נקודות) הוכיחו כי  $d$  מגדירה מטריקה בקבוצה  $X$ .  
(ב) (15 נקודות) הוכיחו או הפריחו את הטענה כי  $d$  מטריקה שלמה אם  $d_i$  שלמות כולן.

שאלה 2 (25 נקודות) תהי  $X \subset \mathbb{R}^n$  קבוצה כלשהי במרחב אוקלידי עם מטריקה רגילה.  
נניח כי  $X$  מקיימת את התכונה הבאה: אם  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה רציפה אז קבוצת ערכים שלה  
 $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$  סגורה ב- $\mathbb{R}$ . הוכיחו כי  $X$  קבוצה קומפקטית.

שאלה 3 (25 נקודות) תהי  $E \subset \mathbb{R}$  קבוצה מדידה לפי לבג.  
הוכיחו כי לפחות אחת מהקבוצות  $E, \mathbb{R} \setminus E$  מכילה קבוצה קומפקטית  $K$  כך שעוצמה של  $K$  גדולה מ- $\aleph_0$ ,  
כלומר  $|K| > \aleph_0$ .

שאלה 4 (25 נקודות) תהי  $E \subset [a, b]$  קבוצה מדידה לפי לבג. לכל  $x \in [a, b]$  נסמן  $E_x = E \cap [a, x]$ .  
נגדיר פונקציה  $f(x) = \mu(E_x)$  לכל  $x \in [a, b]$ , כאשר  $\mu$  מסמן מידת לבג.  
הוכיחו כי קיימת נקודה  $c \in [a, b]$  לפחות אחת כך ש-  $f(c) = \frac{1}{2} \mu(E)$ .

**בהצלחה!**

## חומר עזר

### שאלה 1

להשתמש בהגדרה של מטריקה שלמה. לא צריך שום משפטים מיוחדים.

### שאלה 2

אפשר להשתמש בעובדה כי במרחב אוקלידי  $R^n$  עם מטריקה רגילה, לכל נקודה  $x_0$  ספציפית מוגדרת פונקציה  $f(x) = d(x, x_0)$  ופונקציה זאת רציפה. לא צריך להוכיח עובדה זאת.

### שאלה 3

איך לחשב מידה של קבוצה מדידה על ידי מידה של קבוצות קומפקטיות?

### שאלה 4

לחקור איזה תכונות רלוונטיות יש לפונקציה  $f(x)$  בקטע  $[a, b]$ .