אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 1

1. כזכור, עבור תיבה $B = I_1 \times \ldots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ כאשר $I_1, \ldots, I_k$ קטעים הגדרנו :

$$m(B) = \prod_{j=1}^{d} |I_j|,$$

כאשר

$$|I_j| := \sup I_j - \inf I_j.$$

(א) **אדטיביות סופית עבור מידה של תיבות:** נניח ש־ B תיבה ו־ $B = \biguplus_{j=1}^m B_j$, כאשר $B_1, \ldots, B_m \subset \mathbb{R}^d$ זרות בזוגות. הוכיחו שמתקיים

$$m(B) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j).$$

(ב) **קיום עידון משותף:** נניח שמתקיים:

$$\biguplus_{i=1}^{k} B_i = \biguplus_{j=1}^{m} \tilde{B}_j,$$

כאשר $B_1, \ldots, B_k$ ו־ $\tilde{B}_1, \ldots, \tilde{B}_m$ תיבות. הוכיחו שקיים אוסף

$$\mathcal{C} = \{\hat{B}_1, \ldots \hat{B}_N\}$$

של תיבות זרות בזוגות
כך שכל B_i וכל $\tilde{B}_j$ הוא איחוד של תיבות מ־ $\mathcal{C}$.

2. יהי $\mathcal{E}_0$ אוסף הקבוצות האלמנטריות, כלומר אוסף האיחודים הסופיים של תיבות ב־ $\mathcal{R}^d$. נניח ש־ $E, F \in \mathcal{E}_0$. הוכיחו ש־

$$E \cup F, E \cap F, E \setminus F \in \mathcal{E}_0.$$

3. כזכור עבור קבוצה אלמנטרית $E = \biguplus_{j=1}^n B_j$ הגדרנו מידה אלמנטרית על ידי

$$m(E) := \sum_{j=1}^{n} m(B_j).$$

נניח ש־ $E, F \in \mathcal{E}_0$.
הוכיחו:

- **אדטיביות סופית:** אם $E \cap F = \emptyset$ אזי

$$m(E \uplus F) = m(E) + m(F).$$

- **אינווריאנטיות להזזה:** לכל $v \in \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$m(E+v) = m(E),$$

כאשר

$$E + v := \{w + v \ : \ w \in E\} \subset \mathbb{R}^d.$$

- **מונוטוניות:** אם $E \subset F$ אזי $m(E) \leq m(F)$.
- **תת־אדיטיביות:** $m(E \cup F) \leq m(E) + m(F)$.

עבור קבוצה לא ריקה A (לא בהכרח סופית או בת מנייה) אוסף $(x_a)_{a \in A}$ של מספרים $x_a \in [0, +\infty]$, נגדיר:

$$\sum_{a \in A} x_a := \sup_{F \Subset A} \sum_{a \in F} x_a,$$

כאשר $F \Subset A$ פירושו "F היא תת קבוצה סופית של A", כלומר הסופרמום הוא על פני כל תתי הקבוצות הסופיות של A.

4. - נניח ש־ $\sum_{a \in A} x_a < \infty$, כאשר x_A אי־שליליים. הוכיחו שהקבוצה

$$\{a \in A \ : \ x_a > 0\}$$

היא לכל היותר בת מנייה.

- יהיו A, B קבוצות כלשהן. הוכיחו:

$$\sum_{(a,b) \in A \times B} x_{a,b} = \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} x_{a,b} = \sum_{b \in B} \sum_{a \in A} x_{a,b}$$