אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 2

1. **יחידות מידה אלמנטרית:** תהי $\mathcal{E}_0$ משפחת הקבוצות האלמנטריות ב־ $\mathbb{R}^d$, כלומר איחודים סופיים של תיבות. נניח ש־ $\mu : \mathcal{E}_0 \to [0, +\infty)$ היא פונקציה אדטיבית ואינווריאנטית להזזות כלומר מקיימת

   - $\forall E, F \in \mathcal{E}_0 \;\; \mu(E \uplus F) = \mu(E) + \mu(F)$.
   - $\forall E \in \mathcal{E}_0, \; x \in \mathbb{R}^d \mu(E) = \mu(E + x)$.

   הוכיחו שקיים $c \in [0, +\infty)$ כך שלכל $E \in \mathcal{E}_0$ מתקיים $\mu(E) = c \cdot m(E)$ כאשר $m(E)$ היא המידה האלמנטרית של E.

2. הוכיחו שלכל קבוצה חסומה $A \subset \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$c_*(A) \leq m^*(A) \leq c^*(A).$$

3. עבור $A \subset \mathbb{R}^d$ נסמן ב־ $\tilde{m}_*(A)$ את הסופרמום על פני כל הביטויים מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n)$ כאשר $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ הן סידרה של תיבות זרות בזוגות כך ש־ $\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n \subset A$. הוכיחו שמתקיים $\tilde{m}_*(A) = c_*(A)$.

   באופן לא פורמלי: על ידי החלפת הסכומים הסופיים בסכומים בני מנייה לא "שיפרנו" את המושג של קיבול פנימי.

4. כזכור עבור $A, B \subset \mathbb{R}^n$ הגדרנו:

$$d(A, B) := \inf \{ d(a, b) \;\; : \;\; a \in A \;\; , \;\; b \in B \} \, ,$$

   כאשר עבור $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$, $d(a, b) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k)^2}$ הוא המרחק האוקלידי. הוכיחו: אם $A, B \subset \mathbb{R}^n$, A קומפקטית, B סגורה, ו־ $A \cap B = \emptyset$ אזי $d(A, B) > 0$.

5. (א) הוכיחו שלכל קבוצה $A \subset \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$m^*(A) = \inf \{ m^*(U) \;\; : \;\; A \subseteq U \text{ and } U \text{ is open } \} \, .$$

   (ב) הפריכו את שיוון הבא על ידי דוגמא נגדית:

$$m^*(A) = \sup \{ m^*(U) \;\; : \;\; U \subseteq A \text{ and } U \text{ is open } \} \, .$$

6. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

- A מדידה לבג, כלומר לכל $\varepsilon > 0$ קיימת U פתוחה כך ש־ $U \supset A$ ו־ $m^*(U \setminus A) < \varepsilon$.
- לכל $\varepsilon > 0$ קיימת U פתוחה כך ש־ $m^*(U \triangle A) < \varepsilon$.
- לכל $\varepsilon > 0$ קיימת F סגורה כך ש־ $F \subset A$ ו־ $m^*(A \setminus F) < \varepsilon$.

- לכל $\varepsilon > 0$ קיימת F סגורה כך ש־ $m^*(F \triangle A) < \varepsilon$.
- לכל $\varepsilon > 0$ קיימת E_ε מדידה לבג כך ש־ $m^*(E_\varepsilon \triangle A) < \varepsilon$.

7. **בניית השליש האמצעי של קנטור:** תהי

$$I_n := \bigcup_{a_1,\dots,a_n \in \{0,2\}} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i}, \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n} \right].$$

נגדיר $C := \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. הוכיחו ש־ C היא קבוצה קומפקטית, לא בת מנייה ובעלת מידה חיצונית אפס.