אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 3

1. **קריטריון קרתודורי למדידות:** הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים עבור $A \subset \mathbb{R}^d$:

   (א) A מדידה לבג

   (ב) לכל תיבה $B \subset \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A).$$

2. הוכיחו או הפריכו:

   (א) אם $A \subset \mathbb{R}^d$ מדידה לבג / בורל ו־ $v \in \mathbb{R}^d$ אזי גם $v + A$. מדידה לבג / בורל.

   (ב) אם $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ העתקה לינארית **הפיכה** , ו־ $A \subset \mathbb{R}^d$ מדידה לבג /בורל אזי $L(A)$ מדידה לבג / בורל.

   (ג) אם $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d+1}$ העתקה לינארית **חד חד ערכית** ו־ $A \subset \mathbb{R}^d$ מדידה לבג /בורל אזי $L(A)$ מדידה לבג / בורל.

   (ד) אם $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d-1}$ העתקה לינארית **על** ו־ $A \subset \mathbb{R}^d$ מדידה לבג /בורל אזי $L(A)$ מדידה לבג / בורל.

3. (א) הסיקו מיחידות מידת לבג שלכל העתקה לינארית $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ קיים $c_L \in [0,\infty)$ כך ש־ $m(L(A)) = c_L m(A)$ לכל A מדידה לבג.

   (ב) הסיקו מיחידות מידת לבג שלכל העתקה לינארית $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $c_L = |\det(L)|$. **רמז:** השתמשו בכפליות הדטרמיננטה והוכיחו את הטענה תחילה עבור מטריצות אלמנטריות.

4. יהי $d \geq 2$ ותהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ מסילה חלקה. הראו שהתמונה של f היא קבוצה בעלת מידת לבג 0. הסיקו שלא ניתן לכסות את הקוביה $[0,1]^d$ על ידי מספר בן־מניה של מסילות חלקות.

5. התרגיל הבא מצריך היכרות עם **סודרים** תהי X קבוצה, $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ אוסף של תתי קבוצות של X. לכל מונה α נגדיר $\mathcal{F}_\alpha$ באופן הבא:

   - $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}$.
   - לכל סודר עוקב $\alpha + 1$ נגדיר את $\mathcal{F}_{\alpha+1}$ להיות אוסף האחודים הסופיים ובני המנייה של קבוצות מ־ $\mathcal{F}_\alpha$ (האיחוד הריק כלול) והמשלימים שלהם.
   - עבור סודר גבולי α נגדיר $\mathcal{F}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{F}_\beta$.

   הוכיחו:

   (א) $\mathcal{F}_{\omega_1}$ היא הסיגמה־אלגברה הנוצרת על ידי $\mathcal{F}$, כאשר ω_1 הוא הסודר הראשון שאינו בן־מנייה.

   (ב) מצאו קבוצה בת מנייה $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ כך ש־ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{F})$.

   (ג) הסיקו שהעוצמה של אוסף הקבוצות בורל ב־ $\mathbb{R}^d$ היא עוצמת הרצף, כלומר $2^{\aleph_0}$.

(ד) הסיקו שקיימות קבוצות בעלות תכולה (ז"א מדידות ז'ורדן) שאינן בורל. בפרט, ישנן קבוצות מדידות לבג שאינן בורל. (רמז: היזכרו בקבוצה בעלת תכולה אפס עצמתה היא $2^{\aleph_0}$. מה ניתן לומר על תתי הקבוצות שלה?)

6. הראו שקיימות זוג קבוצות $A,B\subset\mathbb{R}^d$ זרות כך ש־ $m^*(A\uplus B)\neq m^*(A)+m^*(B)$.
רמז: השתמשו בדוגמא שהראנו לקבוצות לא מדידות.