אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 4

1. בהנחת אקסיומת הבחירה, הוכיחו שהמידה החיצונית אינה אדטיבית סופית. כלומר, קיימות קבוצות $A, B \subset \mathbb{R}^d$ זרות כך ש־

$$m^*(A \uplus B) \neq m^*(A) + m^*(B).$$

(רמז: השתמשו בהוכחה שראינו לקיום קבוצה לא מדידה. מה ניתן לאמר על המידה החיצונית של הקבוצה בדוגמא שראינו בשיעור?)

2. תהי $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ מדידה לבג, חסומה ובעלת תומך חסום. הוכיחו ישירות על פי ההגדרה שהאינטגל העליון והאינטגרל התחתון של f מסכימים. הצעה: הוכיחו קודם את הטענה הבאה: עבור f כנ"ל לכל $n > 0$ קיימות זוג פונקציות פשוטות $g, h : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ כל שלכל $x \in \mathbb{R}^d$ מתקיים:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x) \leq g(x) + \frac{1}{n}.$$

3. תהי $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ פונקציה מדידה לבג. הוכיחו:

   (א) **"רציפות של כתימה על ידי מישור אופקי":**

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \min\{f(x), R\} dx.$$

   (ב) **"רציפות של כתימה על ידי גליל אנכי":**

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = \lim_{R \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) 1_{B_R(0)}(x) dx,$$

   כאשר $B_R(0) = \{x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\| \leq R\}$ הוא כדור ברדיוס R סביב הראשית.

4. הוכיחו או הפריכו:

   (א) אם $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ רציפה ו־ $A \subset [0, \infty)$ מדידה לבג אזי $f^{-1}(A)$ מדידה לבג.

   (ב) אם $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ מדידות לבג אזי $f + g$ מדידה לבג.

   (ג) אם $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ מדידות לבג אזי $f \cdot g$ מדידה לבג.

   (ד) אם $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מדידות לבג אזי ההרכבה $f \circ g$ מדידה לבג.

5. תהי $f : \mathbb{R}^d \to [0, \infty]$ מדידה. הוכיחו שהאינטגל הוא $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ שווה למידת לבג ב־ $\mathbb{R}^{d+1}$ של הקבוצה

$$S_f := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} : \ x \in \mathbb{R}^d, \ y \in [0, \infty), \ y \leq f(x)\right\}.$$

כלומר - האינטגרל של פונקציה אי־שליליות הוא "השטח מתחת לגרף". שימו לב: בפרט יש להוכיח שהקבוצה $S_f \subset \mathbb{R}^{d+1}$ מדידה לבג.

6. נאמר ש־ $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^m$ היא איטגרבילית בהחלט אם כל אחת מהקואורדינטות היא אינטגרבילית בהחלט כפונקציה מ־ $\mathbb{R}^d$ ל־ $\mathbb{R}$. את האינטגרל $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$ של f כנ"ל נגדיר בתור וקטור האינטגרלים של הקואורדינטות (זהו וקטור ב־ $\mathbb{R}^m$). הוכיחו את הגירסא הבאה של אי שיוון המשולש:

$$\left\|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx\right\|_2 \le \int_{\mathbb{R}^d} \|f(x)\|_2 dx.$$

כאשר

$$\|(x_1,\ldots,x_m)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{m} |x_k|^2}.$$