אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 6

1. תהי $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ (כלומר אינטגרבילית בהחלט) , $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (כלומר חסומה על קבוצה בעלת משלים אפסי) הראו שהקונבולוציה $f * g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ הנתונה על ידי

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy$$

מוגדרת היטב (כלומר הביטוי שבתוך האינטגרל הוא פונקציה אינטגרבילית בהחלט), והוכיחו ש־ $f * g$ היא פונקציה רציפה.

2. כזכור, $x \in \mathbb{R}^d$ נקראת **נקודת צפיפות** עבור $E \subset \mathbb{R}^d$ אם

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{m(B(x,r))} m(B(x,r) \cap E) = 1.$$

תהי E^* קבוצת נקודות הצפיפות של x ב־ $\mathbb{R}^d$.

(א) מצאו את E^* במקרים הבאים: $E = \mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Q}^d$, $E = [0,1]^d$.

(ב) הוכיחו שלכל $E \subset \mathbb{R}^d$ מדידה לבג מתקיים: $m(E \triangle E^*) = 0$.

3. הוכיחו את משפט Steinhaus: אם $E \subset \mathbb{R}^d$ קבוצה מדידה בעלת מידה חיובית, אזי הקבוצה

$$E - E := \{x - y : \ x, y \in E\}$$

מכילה סביבה פתוחה של הראשית. (רמז: כאשר E בעלת מידה סופית, השתמשו בשאלה הקודמת עבור $1_E * 1_{-E}$).

4. הוכיחו שכל קבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{R}$ היא איחוד של מספר סופי או בן מנייה של קטעים פתוחים זרים שהקצוות שלהם נמצאים מחוץ ל־ U.

5. הוכיחו שאם $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית אזי נגזרת דיני הימנית עליונה, הנתונה על ידי

$$\overline{D_+ F}(x) = \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}(F(x+h) - F(x),$$

היא פונקציה מדידה.

6. הוכיחו שלכל פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ קבוצת הנקודות שבהן הנגזרות החד צדדיות קיימות וסופיות אבל שונות זו מזו לא יכולה להיות בעלת מידה חיובית (שימו לב שלא אמרנו שזו קבוצה מדידה). הצעה: הראו תחילה שלקבוצה

$$E_\varepsilon := \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ f'_{\varepsilon,-}(x) < 0, \ f'_{\varepsilon,+}(x) \in (1,2) \right\}$$

אין נקודות צפיפות לכל $\varepsilon > 0$. כאשר:

$$f'_{\varepsilon,-}(x) := \sup_{0<h<\varepsilon} \frac{1}{h}(f(x) - f(x-h)) \ , \ f'_{\varepsilon,+}(x) := \inf_{0<h<\varepsilon} \frac{1}{h}(f(x+h) - f(x)).$$