אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 7

1. תהי μ_0 קדם מידה על אלגברה בוליאנית $\mathcal{B}_0$ מעל קבוצה X. הוכיחו שאם μ_0 סיגמה סופית אזי הרחבת האן־קולמוגורוב נקבעת ביחידות. כלומר, אם קיימות קבוצות $A_1,\ldots,A_n,\ldots\in\mathcal{B}_0$ כך ש־ $\mu_0(A_n)<\infty$ לכל n וגם $X=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$ אזי ההרחבה של μ_0 למידה על $\sigma(\mathcal{B}_0)$ היא יחידה.

2. תהינה $F,\tilde{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות מונוטוניות לא יורדות. הראו שמידות לבג־סטילטס של m_F ו־ $m_{\tilde{F}}$ זהות אם ורק אם קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\tilde{F}(x)=F(X)+c$ לכל $x\in\mathbb{R}$ כך ש־ F ו־ $\tilde{F}$ רציפות ב־ x.

3. **הקשר בין אינטגרל לבג־סטילטס ואינטגרל רימן־סטילטס עבור פונקציות רציפות:** תהי $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית לא יורדת, ונניח ש־ F רציפה בקצוות הקטע $[a,b]$, ותהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה $a=x_0<\ldots<x_n=b$ עבורה $\sup_{1\leq k\leq n}x_k-x_{k-1}\leq\delta$ ולכל בחירה של $X_1^*,\ldots,x_n^*$ כך ש־ $x_k^*\in[x_{k-1},x_k]$ מתקיים
$$\left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\left(F(x_k)-F(x_{k-1})\right)-\int_{[a,b]}fdF\right|\leq\varepsilon.$$

4. הוכיחו את **נוסחאת האינטגרציה בחלקים עבור אינטגרל לבג סטילטס:** אם $F,G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות מונוטוניות לא יורדות ורציפות, אזי לכל קטע חסום $[a,b]$ מתקיים:
$$\int_{[a,b]}FdG=-\int_{[a,b]}GdF+F(b)G(b)-F(a)G(a).$$

   רמז: השתמשו בתוצאה מהשאלה הקודמת.

5. האם הנוסחה מהשאלה הקודמת נכונה כאשר F ו־ G לא רציפות? האם ניתן "לתקן" את הנוסחה למקרה זה? (למשל, כדי לקבל את נוסחאת ה"סכימה בחלקים" עבור המקרה $F(x):=\sum_{n\leq x}a_n$, $G(x):=\sum_{n\leq x}b_n$, כאשר $(a_n)_{n=-\infty}^{+\infty},(b_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ סדרות אי־שליליות כך ש־ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n<+\infty$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_n<+\infty$.)

6. תהינה $\mathcal{B}_X$ ו־ $\mathcal{B}_Y$ סיגמה־אלגבראות מעל X ו־ Y בהתאמה.

   (א) הוכיחו שאם $E\in\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y$ אזי לכל $x\in X$ הקבוצה $E_x:=\{y\in Y\ :\ (x,y)\in E\}$ מקיימת $E_x\in\mathcal{B}_Y$.

   (ב) תהי $f:X\times Y\to\mathbb{R}$ מדידה ביחס ל־ $\mathcal{B}_X\otimes\mathcal{B}_Y$. הוכיחו שלכל $x\in X$ הפונקציה $f_x:Y\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_x(y):=f(x,y)$ היא מדידה ביחס ל־ $\mathcal{B}_Y$.