אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 8

1. משפט לבג־רדון־ניקודים עבור מידות מסומנות ומידות σ־ סופיות:

(א) השתמשו במשפט לגב רדון־ניקודים עבור מידות חיוביות סופיות כדי להוכיח את המסקנה המקבילה עבור מסומנות ν,μ כך ש־ $|\nu|(X) < \infty$ ו־ $|\mu|(X) < \infty$. כלומר הראו שקיימות מידות מסומנות סופיות ν_s, ν_{ac} ופונקציה מדידה $f : X \to \mathbb{R}$ כך ש־ $\nu_{ac} = \int_A f\mu$, $\nu_s \perp \mu$ ו־ $\nu = \nu_s + \nu_{ac}$.

(ב) הכלילו את הסעיף הקודם למידו ν,μ σ־ סופיות.

2. הוכיחו שאם $\nu \ll \mu$ וגם $\mu \perp \nu$ אזי μ היא מידת האפס.

3. הוכיחו שפירוק לבג $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ כאשר $\nu_{ac} \ll \mu$ ו־ $\nu_s \perp \mu$ ביחס ל־ μ הוא יחיד.

4. הוכיחו שנגזרת רדון־ניקודים $\frac{d\nu}{d\mu}$ נקבעת ביחידות עד כדי קבוצה אפסה ביחס ל־ μ.

5. הראו ישירות שאם $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית לא יורדת וגזירה ברציפות אזי מידת לבג סטילטס m_F של F רציפה בהחלט ביחס למידת לבג m ומתקיים $\frac{dm_F}{dm}(x) = F'(x)$ כמעט תמיד.

6. נניח ש־ ν_i, μ_i מידות סיגמה סופיות על $(X_i, \mathcal{F}_i)$ ומתקיים $\nu_i \ll \mu_i$ עבור $i = 1, 2$. הוכיחו שמתקיים $\nu_1 \times \nu_2 \ll \mu_1 \times \mu_2$ וכן

$$\frac{d(\nu_1 \times \nu_2)}{d(\mu_1 \times \mu_2)}(x_1, x_2) = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1) \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2)$$

כמעט תמיד ביחס ל־ $\mu_1 \times \mu_2$.