אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
תרגיל 9

1. כזכור, עבור העתקה לא סינגולרית $T : X \to X$ על מרחב מידה $(X, \mathcal{B}, \mu)$ הגדרנו $T'(x) := \frac{dm\circ T}{dm}(x)$. הוכיחו את כלל השרשת עבור נגזרות של העתקות לא סינגולריות:
$$(T_1 \circ T_2)'(x) = T_1'(T_2(x))T_2'(x),$$
כמעט תמיד ביחס ל־ μ, כאשר $T_1, T_2 : X \to X$ לא סינגולריות.

2. כזכור, $f : U \to \mathbb{R}^d$ עבור $U \subset \mathbb{R}^n$ נקראת **ליפשיץ** אם מתקיים
$$\|f\|_{Lip} := \sup_{x\neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|} < +\infty.$$

f נקראת **בי־ליפשיץ** אם קיים $C \geq 1$ כך שלכל $x, y \in \mathbb{R}^d$ מתקיים
$$C^{-1}\|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|.$$

(א) הראו שאם $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ היא ליפשיץ אזי לכל כדור $B(x, R) \subset \mathbb{R}^d$ ברדיוס R מתקיים
$$f(B(x, R)) \subseteq B(f(x), R\|f\|_{Lip}).$$

(ב) הוכיחו שלכל פונקציה ליפשיץ $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ קיים מספר ממשי אי־שלילי $C_{d,f}$ התלוי רק ב־ d ו־ $\|f\|_{Lip}$ כך שלכל קבוצה $A \subset \mathbb{R}^d$ מתקיים
$$m^*(f(A)) \leq C_{d,f}m^*(A),$$
כאשר m^* היא מידת לבג חיצונית על $\mathbb{R}^d$. מהו הקבוע $C_{d,f}$ הטוב ביותר האפשרי?

(ג) הוכיחו שאם $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ היא בי־ליפשיץ אזי f היא חד־חד ערכית ועל, וגם f^{-1} היא בי־ליפשיץ. (הצעה: כדי להוכיח ש־ f על, הראו שלכל $y \in \mathbb{R}^d$ מתקיים $\inf\{|f(x) - y\| : \ x \in \mathbb{R}^d\} = 0$.)

(ד) הסיקו שכל פונקציה בי־ליפשיץ f היא לא סינגולרית ומתקיים
$$\frac{dm \circ f}{dm} \leq \|f\|^d_{Lip}.$$
כמעט תמיד.

3. תהי $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n,\dots$ סידרת מספרים אי־שלילים $\varepsilon_n \in (0,1)$ כך ש־ $\prod_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n) > 0$. נגדיר קבוצה $C \subset [0,1]$ באופן הבא: באינדוקציה נגדיר סידרת קבוצות C_n כך: $C_0 = [0,1]$. באינדוקציה, $C_n \subset C_{n-1}$ תהיה איחוד זר של 2^n קטעים סגורים זרים $I_{n,1},\dots,I_{n,2^n}$ כך ש־ $I_{n,2k-1}$ ו־ $I_{n,2k}$ הם תתי הקטעים של $I_{n-1,k}$ המתקבלים על ידי הסרת קטע פתוח באורך ε_n ממרכז הקטע. נגדיר: $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.

(א) הוכיחו שהקבוצה C הומיומורפית לקבוצת קנטור (הבניה המתאימה כאשר $\varepsilon_n = \frac{1}{3}$.) כלומר קיימת פונקציה חד־חד ערכית ועל ורציפה (ובעלת הופכית רציפה) מ־ C לקבוצת קנטור.

(ב) הראו שמידת לבג של C חיובית.

(ג) הראו שלא קיימת פונקצייה בי־ליפשץ שממפה את C לקבוצת קנטור.