אוניברסיטת בן־גוריון בנגב - המחלקה למתמטיקה
יסודות תורת המידה (201-1-0081) - סמסטר א' תשע"ז
פתרונות לתרגילים נבחרים

תרגיל 1, שאלה 1

כזכור, עבור תיבה $B = I_1 \times \ldots \times I_d \subset \mathbb{R}^d$ כאשר $I_1, \ldots, I_k$ קטעים הגדרנו :

$$m(B) = \prod_{j=1}^{d} |I_j|,$$

כאשר

$$|I_j| := \sup I_j - \inf I_j.$$

- **אדטיביות סופית עבור מידה של תיבות:** נניח ש־ B תיבה ו־ $B = \biguplus_{j=1}^{m} B_j$, כאשר $B_1, \ldots, B_m \subset \mathbb{R}^d$ זרות בזוגות. הוכיחו שמתקיים

$$m(B) = \sum_{j=1}^{m} m(B_j).$$

פיתרון: ראשית, נשים לב שאם חוצים תיבה $B = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_d, b_d]$ לשתי תיבות זרות אזי הן מהצורה

$$B_1 = [a_1, c_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d] \ , \ B_2 = (c_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_d, b_d],$$

(עד כדי שינוי סדר הקאודינטות והיפוך כיוון של חלק מהצירים). במקרה זה אכן מתקיים:

$$m(B) = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k) = (c_1 - a_1)\prod_{k=2}^{d}(b_k - a_k) + (b_1 - c - 1)\prod_{k=2}^{d}(b_k - a_k) = m(B_1) + m(B_2).$$

בשלב הבא נשים לב שכל תיבה מהצורה $B = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_d, b_d)$ ולכל חלוקה

$$B = \biguplus_{i=1}^{k} B_i$$

ניתן על ידי סידרה של חציות להציג כל אחד מה־ B_i לרשום כאיחוד זר של תיבות מהצורה

$$[x_{i_1}^{(1)}, x_{i_1+1}^{(1)}) \times \ldots \times [x_{i_d}^{(d)}, x_{i_d+1}^{(d)}),$$

כאשר

$$a_k = x_1^{(k)} < \ldots < x_{m_k}^{(k)} = b_k,$$

עד כדי החלפת קטעים חצי פתוחים בסגורים וכו'. בשילוב המסקנה הקודמת לגבי חציות, נסיק שדי להוכיח את הטענה עבור חלוקה מהצורה

$$B = \bigcup_{i_1=1}^{m_1-1} \cdots \bigcup_{i_d=1}^{m_d-1} [x_{i_1}^{(1)}, x_{i_1+1}^{(1)}) \times \ldots \times [x_{i_d}^{(d)}, x_{i_d+1}^{(d)}).$$

(חלוקה כזו היא **מכפלה קרטזית** של חלוקות בכל אחד מהצירים)
ואכן,

$$\sum_{i_1=1}^{m_1-1}\cdots\sum_{i_d=1}^{m_d-1} m([x^{(1)}_{i_1},x^{(1)}_{i_1+1})\times\ldots\times[x^{(d)}_{i_d},x^{(d)}_{i_d+1}))=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{m_1-1}\cdots\sum_{i_d=1}^{m_d-1}\prod_{k=1}^{d}(x^{(k)}_{i_k+1}-x^{(k)}_{i_k})=$$

$$=\sum_{i_1=1}^{m_1-1}(x^{(1)}_{i_1+1}-x^{(k)}_{i_1})\sum_{i_2=1}^{m_2-1}\cdots\sum_{i_d=1}^{m_d-1}\prod_{k=2}^{d}(x^{(k)}_{i_k+1}-x^{(k)}_{i_k})=$$

$$=(b_1-a_1)\sum_{i_2=1}^{m_2-1}\cdots\sum_{i_d=1}^{m_d-1}\prod_{k=2}^{d}(x^{(k)}_{i_k+1}-x^{(k)}_{i_k})=\ldots$$

$$=(b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_d-a_d)=m(B).$$

- **קיום עידון משותף:** נניח שמתקיים:

$$\biguplus_{i=1}^{k} B_i=\biguplus_{j=1}^{m}\tilde{B}_j,$$

כאשר $B_1,\ldots,B_k$ ו־ $\tilde{B}_1,\ldots,\tilde{B}_m$ תיבות. הוכיחו שקיים אוסף

$$\mathcal{C}=\{\hat{B}_1,\ldots\hat{B}_N\}$$

של תיבות זרות בזוגות
כך שכל B_i וכל $\tilde{B}_j$ הוא איחוד של תיבות מ־ $\mathcal{C}$.
פיתרון: נרשום לכל $1\le i\le d$, יהי

$$D_i=\{x^{(i)}_1<\ldots<x^{(i)}_{m_i}\}$$

אוסף נקודות הקצה של הקטעים ברכיב k של התיבות B_j ו־ $\tilde{B}_j$. אזי כל אחת מהתיבות היא איחוד של תיבות מהצורה $I_1\times\ldots\times I_d$ כאשר I_i מהצורה $I_i=(x^{(i)}_j,x^{(i)}_{j+1})$ או $I_i=[x^{(i)}_j,x^{(i)}_j]$.

תרגיל 2, שאלה 5 הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

1. A מדידה לבג, כלומר לכל $\varepsilon>0$ קיימת U פתוחה כך ש־ $A\subset U$ ו־ $m^*(U\backslash A)<\varepsilon$.
2. לכל $\varepsilon>0$ קיימת U פתוחה כך ש־ $m^*(U\triangle A)<\varepsilon$.
3. לכל $\varepsilon>0$ קיימת F סגורה כך ש־ $F\subset A$ ו־ $m^*(A\setminus F)<\varepsilon$.
4. לכל $\varepsilon>0$ קיימת F סגורה כך ש־ $m^*(F\triangle A)<\varepsilon$.
5. לכל $\varepsilon>0$ קיימת E_ε מדידה לבג כך ש־ $m^*(E_\varepsilon\triangle A)<\varepsilon$.

פתרון: הגרירות הבאות נובעות מיידית מהגדרת הפרש, הפרש סימטרי והכלה של קבוצות ומונוטוניות של מידה חיצונית: $1 \Rightarrow 2$ ו־ $4 \Rightarrow 3$. השקילות $1 \Leftrightarrow 3$ ו־ $4 \Leftrightarrow 2$ נובעות מכך שמשלים שלקבוצה מדידה לבג היא קבוצה מדידה לבג (אחת הטענות שהוכחנו בשיעור כדי להראות שאוסף הקבוצות המדידות לבג הוא סיגמה אלגברה). הגרירה $5 \Rightarrow 2$ נובעת מכך שכל קבוצה פתוחה היא בפרט מדידה לבג.

נותר להראות למשל את הגרירה $1 \Rightarrow 5$. נניח ש A מקיימת את (5). יהי $\varepsilon > 0$. אזי על פי תנאי (5) קיימת קבוצה E מדידה לבג כך ש־ $m^*(E \triangle A) < \varepsilon/2$. על פי הגדרת המידה החיצונית, פירוש הדבר שקיימות תיבות $B_1, \ldots, B_n, \ldots$ כך ש־ $E \triangle A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ וגם $\sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) < \varepsilon/4$. בה"כ ניתן להניח שהתיבות B_n פתוחות בעזרת הטריק של הגדלת כל אחת מהתיבות בקצת, כפי שעשינו מספר פעמים בשיעור.

מכך ש־ E מדידה לבג, קיימת קבוצה פתוחה $\tilde{U}$ כך ש־ $E \subset \tilde{U}$ וגם $m^*(\tilde{U} \setminus E) < \varepsilon/4$. נגדיר $U = \tilde{U} \cup \bigcup_n B_n$. אזי U פתוחה כאיחוד של קבוצות פתוחות ומתקיים:

$$A \subseteq (E \triangle A) \cup E \subset \bigcup_n B_n \cup \tilde{U} = U.$$

כמו כן:

$$U \setminus A \subseteq (U \setminus E) \cup (E \triangle A) \subseteq$$

$$\subseteq (\tilde{U} \setminus E) \cup \bigcup_n B_n \cup (E \triangle A).$$

לכן , מתת־אדטיביות של מידת לבג חיצונית ומכך שמידה חיצונית מתלכדת עם מידה אלמנטרית עבור תיבות:

$$m^*(U \setminus A) \leq m^*((\tilde{U} \setminus E) + \sum_{n=1}^{\infty} m(B_n) + m^*(E \triangle A) < \varepsilon.$$

תרגיל 3, שאלה 1

קריטריון קרתודורי למדידות: הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים עבור $A \subset \mathbb{R}^d$:

(א) A מדידה לבג

(ב) לכל תיבה $B \subset \mathbb{R}^d$ מתקיים

$$m^*(B) = m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A).$$

פיתרון:

(א) $\Leftarrow$ (ב) : תהי A מדידה לבג. ו B תיבה. בפרט B מדידה לבג. מכיוון שקבוצות מדידות לבג סגורות לאיחודים, חיתוכים ומשלימים גם $B \cap A$ ו־ $(B \setminus A = B \cap A^c)$ מדידות לבג. הראנו שמידת לבג חיצונית היא אדטיבית על קבוצות מתקיים

$$m^*(B) = m^*((B \cap A) \uplus (B \cap A^c)) = m^*(B \cap A) + m^*(B \setminus A).$$

(ב) $\Leftarrow$ (א) : ניח ש־ A מקיימת את (ב).

מספיק להוכיח ש־ $A\cup B$ מדידה לכל תיבה, כי ניתן לרשום את $\mathbb{R}^d$ כאיחוד בן מניה של תיבות וקבוצות מדידות לבג סגורות לאיחודים בני מנייה. לכן די להניח ש־ A חסומה ובפרט $m^*(A)<\infty$.

יהי $\varepsilon>0$. אזי קיימות סידרה של תיבות $(B_n)_{n=1}^\infty$ כך ש־ $A\subset\bigcup_n B_n$ ו־ $\sum_n m(B_n)\le m^*(A)+\varepsilon$. מההנחה לכל n

$$m^*(B_n\cap A)+m^*(B_n\setminus A)=m^*(B_n)=m(B_n).$$

מתת־אדטיביות של מידה חיצונית:

$$m^*(A)\le\sum_n m^*(B_n\cap A),$$
$$m^*(\bigcup_n B_n\setminus A)\le\sum_n m^*(B_n\setminus A),$$

ולכן

$$m^*(A)+m^*(\bigcup_n B_n\setminus A)\le\sum_n m^*(B_n\cap A)+m^*(B_n\setminus A)=\sum_n m^*(B_n)=\sum_n m(B_n)\le m^*(A)+\varepsilon.$$

נצמצם $m^*(A)$ משני הצדדים (כאן משתמשים בהנחה ש־ A חסומה) ונקבל $m^*(\bigcup_n B_n\setminus A)\le\varepsilon$. עכשיו על ידי הטריק הרגיל אפשר להניח ש־ B_n פתוחות בלי הגבלת הכלליות ולהגדיר $U=\bigcup_n B_n$. זה מראה ש־ A מדידה לבג.

תרגיל 3, שאלה 2

הוכיחו או הפריכו:

(א) אם $A\subset\mathbb{R}^d$ מדידה לבג / בורל ו־ $v\in\mathbb{R}^d$ אזי גם $v+A$. מדידה לבג / בורל.

תשובה: נכון.

(ב) אם $L:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ העתקה לינארית **הפיכה** , ו־ $A\subset\mathbb{R}^d$ מדידה לבג /בורל אזי $L(A)$ מדידה לבג / בורל. **תשובה: בשני המקרים נכון** . לגבי קבוצות בורל, די להוכיח שאוסף הקבוצות A כך ש־ $L(A)$ הוא בורל מכיל את הקבוצות הפתוחות, סגור לאיחודים בני מנייה ולמשלימים. מכיוון ש־ L הפיכה, $L(A^c)=L(A)^c$ ולכן הטענה לגבי משלימים ברורה. כמו כן $L(\bigcup_n A_n)=\bigcup_n L(A_n)$ ומכך נובעת הטענה לגבי איחודים בני מנייה. כמו כן אם U פתוחה אזי $L(U)$ פתוחה (כאן משתמשים בכך שתמונה הפוכה של קבוצה פתוחה על ידי פונקציה רציפה היא פתוחה ובהפיכות של L) , ובפרט $L(U)$ בורל.

לגבי קבוצות לבג: אפשר להראות תחילה שלכל העתקה לינארית L קיים קבוע M כך ש

$$m^*(L(A))\le M\cdot m^*(A)\forall A\subset\mathbb{R}^d.$$

זה מראה שתמונה של קבוצה אפסה היא קבוצה אפסה.

(ג) אם $L:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d+1}$ העתקה לינארית **חד חד ערכית** ו־ $A\subset\mathbb{R}^d$ מדידה לבג /בורל אזי $L(A)$ מדידה לבג / בורל.

תשובה: עבור בורל ־ כן, עבור לבג ־ כן. לגבי לבג־ $L(\mathbb{R}^d)\subset\mathbb{R}^{d+1}$ אפסה ולכן $L(A)\subset\mathbb{R}^{d+1}$ אפסה לכל $A\subset\mathbb{R}^d$, ובפרט $L(A)$ מדידה לבג.

)

לגבי בורל: די לראות שתמונה של קבוצה פתוחה היא חיתוך של פתוחה עם על מישור ולכן בורל ולטפל באיחודים בני מנייה ומשלימים באופן דומה למקרה קודם.

(ד) אם $L:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^{d-1}$ העתקה לינארית **על**
ו־ $A\subset\mathbb{R}^d$ מדידה לבג /בורל אזי $L(A)$ מדידה לבג / בורל.

לגבי לבג ־ לא נכון, לגבי בורל ־ לא נכון! לגבי לבג: תהי $B\subset\mathbb{R}$ לא מדידה לבג, אזי $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2:\ \ x\in B\}$ אפסה לכן מדידה לבג ב־ $\mathbb{R}^2$. אבל עבור $L(x,y)=x$ מצקיים $L(A)=B$ לא מדידה.

לגבי בורל־ כאן התשובה בלתי צפוייה ומסובכת. למעשה, לבג עצמו פרסם הוכחה שגוייה לטענה ההפוכה. הטעות בהוכחה, כמו גם דוגמא נגדית יפיפיה נמצאה על ידי Suslin. שימו לב: מה משתבש עם מנסים לחזור על "ההוכחה" של המקרה החד חד ערכי?

דף תרגיל 6 **שאלה** 6 הוכיחו שלכל פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ קבוצת הנקודות שבהן הנגזרות החד צדדיות קיימות וסופיות אבל שונות זו מזו לא יכולה להיות בעלת מידה חיובית

פתרון: נסמן ב־ E_+ את קבוצת הנקודות שבהן נגזרות החד צדדיות והנגזרת הימנית גדולה יותר, וב־ E_- את קבוצת הנקודות שבהן נגזרות החד צדדיות והנגזרת הימנית קטנה יותר. נוכיח ש־ E_+ בעלת מידה אפס, וההוכחה ל־ E_- דומה (או על ידי החלפת f ב־ $x\mapsto f(-x)$).

נשים לב שלכל $x\in E_+$ קיימות אבל שונות אזי קיימים $q\in\mathbb{Q}$ ו־ $n\in\mathbb{N}$ כך שלכל $y\in(x-\frac{1}{n},x)$ מתקיים

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}<q$$

ולכל $y\in(x,x+\frac{1}{n})$ מתקיים

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}>q$$

נסמן ב־ $A_{n,q}$ את אוסף הנקודות שמקיימות תנאי זה. נשים לב שאם $x,y\in A_{n,q}$ ו־ $x<y$ אזי בהכרח $y\geq x+\frac{1}{n}$. מכאן ש־ $A_{n,q}$ לכל היותר בת מנייה. עכשיו

$$E_+\subseteq\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}A_{n,q}$$

ולכן E_+ לכל היותר בת מנייה, ובפרט בעלת מידה אפס.