הרצאה 2

קרקטרים

<u>הגדרה</u>: תהא V הצגה של חבורה סופית G. <u>הקרקטר</u> של V שיסומן χ_V הוא הפונקציה $\chi_V : G \to \mathbb{C}$ המוגדרת ע"י

$$\chi_V(g) = tr(\rho(g)) \qquad (g \in G)$$

<u>הערות</u>

(1) הקרקטר הוא <u>פונקצית מחלקה</u>, כלומר, הוא קבוע על מחלקות צמידות:

$$\begin{aligned}\chi_V(ghg^{-1}) &= tr(\rho(ghg^{-1})) \\ &= tr(\rho(g)\rho(h)\rho(g^{-1})) = tr(\rho(h)) \\ &= \chi_V(h)\end{aligned}$$

(2) להצגות שקולות יש את אותו קרקטר: אם $T : V_1 \xrightarrow{\sim} V_2$ איזומורפיזם של הצגות אז $\rho_2(g) = T \circ \rho_1(g) T^{-1}$ ולכן $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.

(3) $\chi_V(1) = \dim V$.

<u>תרגיל</u>: תהא V הצגת הפרמוטציה המתאימה לפעולה של G על קבוצה סופית X. אז $\chi_V(g) =$ מספר נקודות השבת של g.
X G

נראה בהמשך שהקרקטר של הצגה מאפיין אותה לחלוטין.

פעולות על הצגות

(1) סכום ישר $V \oplus U$ $\quad \rho(v+u) = \rho_1(v) + \rho_2(u)$.

(2) ההצגה הדואלית. אם V הצגה אז גם $V^* = Hom_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$ הוא הצגה:

$$\rho^*(g) := {}^t\rho(g^{-1}) : V^* \longrightarrow V^*$$

כאשר t מציין את העתקת הטרנספוז.

(3) אם V_1, V_2 הצגות, אז ל- $Hom(V_1,V_2)$ יש מבנה טבעי של הצגה

$$\forall T \in Hom(V_1,V_2) \quad , \quad \rho(g)T \in Hom(V_1,V_2)$$

מוגדר ע"י: $$\big(\rho(g)T\big)(v) = \rho_2(g)\Big(T\big(\rho_1(g)^{-1}(v)\big)\Big) \qquad v\in V_1$$

תרגיל: בידקו שזו אכן הצגה. מהו מימדה?

הערה: בהמשך, נוותר על רישום ההומומורפיזם של ההצגה, ופשוט נרשום:

$$(g\cdot T)(v) = g\cdot\big(T(g^{-1}\cdot v)\big)$$

(ד) מכפלה טנזורית של הצגות.

הכנה: מכפלה טנזורית של מרחבים וקטוריים.

אם V ו- W מרחבים וקטוריים נגדיר מרחב וקטורי חדש שיסומן $V\otimes W$

(אם V ו- W ממימד סופי אז המימד של $V\otimes W$ יהיה מכפלת מימדיהם)

יהי $\mathbb{C}(V\times W)$ המרחב הוקטורי שאברי $V\times W$ הם בסיס שלו:

$$\mathbb{C}(V\times W) = Span_{\mathbb{C}}\{e_{(v,w)} \mid (v,w)\in V\times W\}$$

יהי k תת המרחב של $\mathbb{C}(V\times W)$ הנפרש ע"י

$$\Big\{e_{(v_1,w)} + e_{(v_2,w)} - e_{(v_1+v_2,w)},\ e_{(v,w_1)} + e_{(v,w_2)} - e_{(v,w_1+w_2)},\ a e_{(v,w)} - e_{(av,w)},\ a e_{(v,w)} - e_{(v,aw)} \quad \forall a\in\mathbb{C},\ \forall v,v_1,v_2\in V\ \ \forall w,w_1,w_2\in W\Big\}$$

אז $V\otimes W := \mathbb{C}(V\times W)/k$.

את התמונות של אברי הבסיס במרחב המנה נסמן $v\otimes w = e_{(v,w)}+k$.

תרגיל: אם $\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של V ו- $\{w_1,\dots,w_m\}$ בסיס של W, אז $\{v_i\otimes w_j \mid 1\le i\le n,\ 1\le j\le m\}$ בסיס של $V\otimes W$.

כעת, אם V_1 ו- V_2 הצגות אז גם $V_1\otimes V_2$ הצגה, ע"י:

$$\rho(g)(v_1\otimes v_2) := \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2$$

תרגיל: אם V, V' הצגות של G עם קרקטרים χ_V, $\chi_{V'}$ בהתאמה, אז

(א) $\chi_{V\oplus V'} = \chi_V + \chi_{V'}$

(ב) $\chi_{V^*} = \overline{\chi_V}$

(ג) $\chi_{V\otimes V'} = \chi_V \cdot \chi_{V'}$

רמז: (א) מיידי מההגדרה, עבור (ב)-(ג), לכל $g\in G$ קבוע אפשר ללכסן את $\rho(g)$ ואת $\rho'(g)$ (מדוע?).

תרגיל: אם V ו- W מרחבים וקטוריים ממימד סופי אז קיים איזומורפיזם קנוני

$$V^*\otimes W \xrightarrow{\sim} Hom(V,W)$$

אם בנוסף V ו- W הם הצגות אז האיזומורפיזם הוא גם של הצגות כאשר הפעולות הן כפי שהגדרנו ב- (3) ו- (4).

פתרון: נשתמש בתכונה האוניברסלית: $V\otimes W$ הוא המרחב היחיד המקיים שלכל העתקה בילינארית Ψ קיימת העתקה $\overline{\Psi}$ כך שהדיאגרמה קומוטטיבית

$$\begin{tikzcd} V\times W \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "(v{,}w)\mapsto v\otimes w"'] & U \\ V\otimes W \arrow[ur, dotted, "\exists\overline{\Psi}"'] \arrow[u, phantom, "G"] & \end{tikzcd}$$

נגדיר העתקה $V^*\times W \xrightarrow{\Psi} Hom(V,W)$ ע"י $(f,w)\mapsto (v\mapsto f(v)w)$

זו העתקה בילינארית, ולכן יש העתקה מושרית היטב $\Psi: V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V,W)$ כך ש- $\Psi(f \otimes w) = (v \mapsto f(v)w)$.

נבדוק שהיא חח"ע: יהי $\zeta = \sum_{i,j} a_{ij} f_i \otimes w_j$ איבר כללי ב- $V^* \otimes W$ כאשר $f_1, \dots, f_n$ ו- $w_1, \dots, w_m$ בסיסים של V^* ו- W בהתאמה.

נניח ש- $\Psi(\zeta)$ היא העתקת האפס. אז לכל $v \in V$ מתקיים

$$\Psi(\zeta)(v) = \sum_j \Big(\sum_i a_{ij} f_i(v) \Big) w_j = 0$$

כיוון ש- $\{w_j\}$ ו- $\{f_i\}$ בסיסים $\Leftarrow$ $a_{ij} = 0$ $\Leftarrow$ $\zeta = 0$. $\square$