הצגות וקרקטרים: קשרים נוספים

עד כה ראינו את התכונות הבאות של הקרקטרים

1. $V \cong V' \iff \chi_V = \chi_{V'}$.
2. V אי-פריקה $\iff 1 = (\chi_V, \chi_V)$.
3. הקרקטרים של ההצגות האי-פריקות הם בסיס א"נ למרחב פונקציות המחלקה.
4. כל הצגה אי-פריקה של G מופיעה בהצגה הרגולרית בריבוי השווה למימדה.

לכן $\chi_R(g) = \sum_i \dim V_i \cdot \chi_{V_i}(g)$.

(נשים לב, מכאן נובע שלכל $g \neq 1$: $0 = \sum_i \dim V_i \, \chi_{V_i}(g)$.)

טענה (אורתוגונליות הקרקטרים II)

לכל $g \in G$ נסמן ב- $c(g)$ את גודל מחלקת הצמידות של g ב- G. אז

(א) $\forall g \in G: \sum_\chi \overline{\chi(g)}\, \chi(g) = |G| / c(g)$ (הסכום הוא על הקרקטרים האי-פריקים)

(ב) אם g ו- h לא צמודים אז $\sum_\chi \chi(g)\chi(h) = 0$.

הוכחה: נסמן ב- $\delta_{[g]}$ את הפונקציה המציינת של מחלקת הצמידות של g.
אז $\delta_{[g]} \in \mathbb{C}_{class}(G)$ ולכן קיימים סקלרים $a_\chi \in \mathbb{C}$ כך ש- $\delta_{[g]} = \sum_\chi a_\chi \cdot \chi$
כאשר המקדמים נתונים ע"י:

$$a_\chi = (\delta_{[g]}, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} \delta_{[g]}(h) \cdot \overline{\chi(h)}$$

$$= \frac{1}{|G|} c(g) \overline{\chi(g)}$$

ולכן,

$$\delta_{[g]}(h) = \frac{c(g)}{|G|} \sum_\chi \overline{\chi(g)}\, \chi(h)$$

ואז עבור $h \in [g]$ מקבלים את (א) ועבור $h \notin [g]$ את (ב) $\square$

דוגמא: נחשב את טבלת הקרקטר של S_3

קרקטר \ מחלקה	$[e]$	$[(12)]$	$[(123)]$
(טריוויאלי) χ_1	1	1	1
(סימן) χ_2	1	-1	1
(סטנדרטי) χ_3	2	0	-1

אורתוגונליות השורות (למשל): $(\chi_1,\chi_2) = \frac{1}{6}\sum_{g\in S_3}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)}$

$$= \frac{1}{6}\left(|[e]|\cdot 1\cdot 1 + |[(12)]|\,1\cdot(-1) + |[(123)]|\cdot 1\cdot 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1 + 3\cdot(-1) + 2\cdot 1\right) = 0$$

אורתוגונליות העמודות (למשל): $\sum_i \chi_i(e)\,\chi_i((123)) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot(-1) = 0$.

<u>חוג ההצגות של G</u>

נניח שלחבורה G יש k הצגות אי-פריקות שונות $V_1,\dots,V_k$.
נסמן ב- $R(G)$ את המודול החופשי מעל $\mathbb{Z}$ שבסיסו ההצגות האי-פריקות:

$$R(G) = \left\{ \sum_i a_i V_i \;\middle|\; a_i \in \mathbb{Z} \right\} \underset{\text{כ-}\mathbb{Z}\text{-מודול}}{\cong} \mathbb{Z}^k$$

(נגדיר את החיבור ב-$R(G)$ כסכום הישר: $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$.)
מבנה הכפל ב-$R(G)$ יהיה המבנה המושרה ממכפלה טנזורית של הצגות אי-פריקות (הבסיס) ומורחב לינארית. איברי $R(G)$ יקראו "הצגות וירטואליות" (למשל, אם V_i הצגה אי-פריקה אז $-V_i$ היא אובייקט פורמלי ולא הצגה אמיתית).

מתקיים: $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \cong V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$ = אסוציאטיביות הכפל
$(V_1\oplus V_2)\otimes V_3 \cong V_1\otimes V_3 \oplus V_1\otimes V_3$ = דיסטריבוטיביות הכפל.

$V_2 \otimes V_1 \simeq V_1 \otimes V_2 \quad = \quad$ קומוטטיביות הכפל.

$\mathbb{C} \otimes V \simeq V \otimes \mathbb{C} \simeq V \quad \Rightarrow \quad$ ההצגה הטריוויאלית $\mathbb{C}$ היא איבר היחידה בחוג

ההעתקה המתאימה להצגה V את הקרקטר שלה היא הומומורפיזם של חוגים:

$$R(G) \longrightarrow \mathbb{C}_{class}(G)$$

$$V \longmapsto \chi_V$$

(כי $\chi_{V_1 \oplus V_2} = \chi_{V_1} + \chi_{V_2}$ ו- $\chi_{V_1 \otimes V_2} = \chi_{V_1} \cdot \chi_{V_2}$)

שים לב ש- $R(G) \simeq \mathbb{Z}^k$ (כ- $\mathbb{Z}$-מודול) ו- $\mathbb{C}_{class}(G) \simeq \mathbb{C}^k$

(כמרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$) ומתקיים $R(G) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}_{class}(G)$.

$R(G)$ נקרא גם חוג Grothendieck של G, או של הקטגוריה של ההצגות של G.

צמצום והשראה של הצגות (restriction & induction)

צמצום: אם (ρ,V) הצגה של G ו-H תת-חבורה של G, נסמן ב- $Res^G_H(\rho)$ (או ρ_H) את הצמצום של ρ ל-H. $Res^G_H(\rho)=\rho|_H : H \to Aut(V)$.

הצמצום הוא פעולה פשוטה וטבעית. לפעולה זו יש פעולה "דואלית" במובן שיתברר בהמשך בו לוקחים הצגה של H וממנה בונים הצגה של G. פעולה זו נקראת השראה (induction).

השראה: נניח שנתונה הצגה (ρ,G,V) ותהא (ρ_H,H,V) ההצגה המצומצמת לת"ח H. ותהא $W \subseteq V$ H-תת-הצגה של ρ_H (כלומר, W אינווריאנטי ביחס ל-$\rho(h)$ לכל $h\in H$, ולא בהכרח לכל $g\in G$).
נסמן ב- $\theta : H \to Aut(W)$ את ההצגה המתקבלת על W. נשים לב שלכל $g\in G$ המרחב הוקטורי

$$\rho(g)W \subseteq V$$

תלוי רק בקוסט השמאלי של g: gH. אכן, $\rho(gh)W=\rho(g)\rho(h)W=\rho(g)W$.
לכל קוסט שמאלי $\sigma=gH\in G/H$ נסמן $W_\sigma := \rho(g)W$.
ברור שפעולות $\rho(g)$ על V משרה פרמוטציה על אוסף תתי-המרחבים $\{W_\sigma \mid \sigma\in G/H\}$, בפרט, הסכום

$$\sum_{\sigma\in G/H} W_\sigma \subseteq V$$

הוא תת-הצגה של G ב-V!

הגדרה: נאמר שהצגה (ρ,V) של G היא הצגה מושרית מהצגה (θ,W) של H אם (בסימונים שלמעלה)

$$V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma$$

כלומר ב-(*) יש שוויון (לא רק הכלה) והסכום הוא סכום ישר.
בפרט, נשים לב שמתקיים: $\dim V = [G:H]\dim W$.

דוגמאות

1. ההצגה הרגולרית של G היא ההצגה על המרחב $R_G = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\delta_g \mid g\in G\}$
תת-המרחב $R_H = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\delta_h \mid h\in H\}$ הוא H-תת-הצגה של $\mathrm{Res}^G_H(r_G)$ שכהצגה הוא איזומורפי להצגה הרגולרית של H:

$$R_H \subset R_G$$

ומתקיים $R_G = \bigoplus_{t\in T} r_G(t) R_H$ (T מערכת נציגים עבור G/H)
במילים: R_G, ההצגה הרגולרית של G, מושרית מההצגה R_H, ההצגה הרגולרית של H

2. אם G חבורה ו-H תת-חבורה, אז מרחב הקוסטים $X=G/H$ הוא G-מרחב,
כלומר G פועלת על X, ומקבלים את הצגת התמורה של X. יהי

$$V = \mathbb{C}(X) = \{f: X\to\mathbb{C}\} = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\{\delta_\sigma \mid \sigma\in G/H\}$$

מרחב ההצגה המתאים. נסמן את ההצגה ב-(ρ,V).
אז לכל $g\in G$ ולכל $\sigma\in G/H$ מתקיים $\rho(g)\delta_\sigma = \delta_{g\sigma}$ קוסט אחר
ומתקיים

$$V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} \mathbb{C}\delta_\sigma$$

מרחבים חד מימדיים $\mathbb{C}\delta_\sigma = W_\sigma$

וההצגה (ρ,V) מושרית מההצגה $W=\mathbb{C}\delta_H$, ההצגה הטריוויאלית של H.

3. אם ρ_i (הצגה של G) המושרית על ידי θ_i (הצגה של H) עבור $i=1,2$
אז $\rho_1\oplus\rho_2$ מושרית מ-$\theta_1\oplus\theta_2$ (<u>תרגיל:</u> בדקו זאת)

4. אם (ρ,V) הצגה של G המושרית ע"י (θ,W) (הצגה של H)
ואם $W_1\subseteq W$ היא H-תת-הצגה אז

$$V_1 := \sum_{t\in T}\rho(t)W_1$$

(T נציגים של המחלקות ב-G/H)
היא הצגה של G המושרית ע"י W_1. (<u>תרגיל:</u> בדקו זאת).

כעת נוכיח קיום ויחידות (עד כדי איזומורפיזם) של הצגות משרות.

<u>למה:</u> נניח שהצגה (V,ρ) של G מושרית ע"י הצגה (θ,W) של H, $H<G$. תהא $\rho': G\to Aut(V')$ הצגה של G ותהא $f: W\to V'$ העתקה של H-הצגות. אז קיימת G-העתקה יחידה

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & V' \\ W \arrow[u, hook] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

המרחיבה את f.

<u>הוכחה</u>

<u>יחידות:</u> אם קיימת F כזו ואם $u\in\rho(g)W$ אז $\rho(g)^{-1}u\in W$, ומכאן

$$F(u) = F\left(\rho(g)\rho(g)^{-1}u\right) \underset{\substack{\text{כי } F \text{ היא}\\ G\text{-העתקה}}}{=} \rho'(g)F\left(\rho(g)^{-1}u\right) \underset{\substack{\text{כי } F \text{ מרחיבה}\\ \text{את } f}}{=} \rho'(g)f\left(\rho(g)^{-1}u\right)$$

ולכן, F נקבעת לחלוטין על המרחבים $\rho(g)W$ שפורשים את V.

<u>קיום:</u> כיוון ש- $V=\bigoplus_{\sigma\in G/H} W_\sigma$ מספיק להגדיר את F על כל אחד מהמרחבים W_σ. נקח $u\in W_\sigma$, ונבחר נציג $g\in\sigma$. <u>נגדיר</u> את $F(u)$ ע"י $F(u)=\rho'(g)f(\rho(g)^{-1}u)$.
יש להראות שההגדרה לא תלויה בבחירת הנציג $g\in\sigma$. אכן, אם נחליף את g בנציג אחר gh ($h\in H$), נקבל:

$$\rho'(gh)f\left(\rho(gh)^{-1}\right) = \rho'(g)\rho'(h)f\left(\theta(h)^{-1}\rho(g)^{-1}u\right)$$

$$\underset{\text{כי } f \text{ היא } H\text{-העתקה.}}{=} \rho'(g)f\left(\cancel{\theta(h)}\,\cancel{\theta(h)^{-1}}\rho(g)^{-1}u\right) \quad \checkmark$$

$\square$

<u>משפט</u>: תהא (θ,W) הצגה של H. אז קיימת הצגה מושרית (ρ,V) של G המושרית מ- (θ,W) (היא יחידה עד כדי איזומורפיזם.

<u>הוכחה</u>:

<u>קיום</u> נשים לב שמדוגמא (3) מספיק להוכיח את המשפט להצגות אי פריקות. אם (θ,W) אי-פריקה אז היא תת הצגה של ההצגה הרגולרית של H לכן, ע"י שימוש בדוגמא (4), מספיק להוכיח את המשפט עבור ההצגה הרגולרית של H. אבל מקרה זה הוא בדיוק דוגמא (2).

<u>יחידות</u> נניח ש- (ρ,V) ו- (ρ',V') שתי הצגות מושרות ע"י (θ,W). נפעיל את הלמה עבור השיכון $W \hookrightarrow V'$ (שהוא כמובן H-העתקה). הלמה מבטיחה ששיכון זה ניתן להרחבה ל- G-העתקה $V \to V'$ (שהיא הזהות על W). לכן, תמונת F מכילה את כל תתי-המרחבים $\rho'(g)W$ (כי $F(\rho(g)W)=\rho'(g)F(W)$) ולכן תמונת F היא כל V'. כיוון ששני המרחבים V ו- V' הם שווי מימד $= [G:H]\dim W$ אז F היא G - איזומורפיזם. □