בס"ד:

חדו"א 1-א 201-1-0011 טניה ויקמן

הנושא: רציפות במידה שווה.

736 − 751 , 760

$\boxed{736.}$ $f(x)$ רציפה על קבוצה X אך אינה רציפה בה במידה שווה.

$\forall x'' \in X \ \& \ \forall \varepsilon>0 \ \exists \ \delta=\delta(\varepsilon, x'') \ \forall x' \ |x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$\exists \varepsilon>0 \ \forall \delta>0 \ \exists x', x'' \in X, \ |x'-x''|<\delta \ \& \ |f(x')-f(x'')| \geq \varepsilon.$

$\boxed{737.}$ $f(x)=\frac{1}{x}, \ X=(0,1)$

$f(x)=\frac{1}{x}$ רציפה על $X=(0,1)$ כפונק' אלמנטרית

נקח

$x'_n=\frac{1}{n} \to 0 \quad x''_n=\frac{1}{n+1} \to 0 \quad |x'_n-x''_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

אך

$|f(x'_n)-f(x''_n)| = |n-(n+1)| = 1 \geq \varepsilon$ כאשר $0<\varepsilon\leq 1$.

ז.א. $\frac{1}{x}=f(x)$ אינה רציפה במידה שווה על $X=(0,1)$.

$\boxed{738}$ $f(x)=\sin\frac{\pi}{x} \quad X=(0,1)$

$f(x)$ רציפה עבור $x\neq 0$ כפונק' אלמנטרית, $|\sin\frac{\pi}{x}|\leq 1$.

נקח

$x'_n=\frac{1}{n}\to 0, \quad x''_n=\frac{2}{2n+1}\to 0 \quad |x'_n-x''_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$|f(x'_n)-f(x''_n)| = |\sin\pi n - \sin\frac{\pi}{2}(2n+1)| = |0\pm 1| = 1 \geq \varepsilon$

עבור $0<\varepsilon\leq 1$ $(\varepsilon=\frac{1}{2}$ למשל$)$

ז.א. $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה על $X=(0,1)$.

כבר עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ ישנם x'_n, x''_n קרובים אחד לשני ככל שנרצה כאלה ש- $|f(x'_n)-f(x''_n)|\geq\varepsilon$ בניגוד להגדרת רציפות במידה שווה.

בס"ד

חדו"א 1-א 201-1-0011 טניה וקסמן

הנושא: רציפות במידה שווה (המשך)

$\boxed{739.}$ $f(x) = \sin x^2$ $X = (-\infty, +\infty)$

$f(x)$ רציפה וחסומה על X, כי $\sin x, x^2$ רציפות כפונקציות אלמנטריות, $\sin x^2$ — הרכבה של 2 פונקציות רציפות ו- $|\sin x^2| \le 1$.

ניקח

$$x_n' = \sqrt{\pi n} \to +\infty, \quad x_n'' = \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)} \to +\infty$$

$$|x_n' - x_n''| = \left|\sqrt{\pi n} - \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)}\right| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\pi n} + \sqrt{\frac{\pi}{2}(2n+1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = \left|\sin \pi n - \sin \frac{\pi}{2}(2n+1)\right| = |0 \pm 1| = 1 \ge \varepsilon$$

לכל $0 < \varepsilon \le 1$. לפי 736 ... $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה על $X = \mathbb{R}$.

$\boxed{740}$ נתון: $f(x)$ רציפה על $X = [a, +\infty)$ ו- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$.
הוכח כי $f(x)$ רציפה במידה שווה על X.

הוכחה:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists E\ \forall x > E\ |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$x', x'' \in (E, +\infty)\quad |f(x') - f(x'')| = |f(x') - L + L - f(x'')| \le$$

$$\le |f(x') - L| + |f(x'') - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

נתבונן בקטע $[a, E+1]$. בו $f(x)$ רציפה במידה שווה (לפי משפט קנטור). ז.א. עבור ε שלקחנו ומצאנו E $\exists \delta_1$ כך ש: $x', x'' \in [a, E+1]$ ו- $|x' - x''| < \delta_1$ ו- $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

נפריד 3 מקרים:

1) $x', x'' \in (E, +\infty)$ $\Downarrow$ δ כלשהו

2) $x' \in (a, E]$, $x'' \in (E, \infty)$ $\Downarrow$ $\delta_2 < 1$ $x', x'' \in [a, E+1]$

3) $x', x'' \in [a, E]$ $\Downarrow$ δ_1

חדו"א 1-א   201-1-0011   טניה וקסמן

$\boxed{\text{המשך } 740}$

הנושא: רציפות במידה שווה (המשך)

אז $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ והיה טוב עבור $[a,+\infty)$

ז.א. עבור $\forall\varepsilon>0$ מצאנו $\delta>0$ כך ש אם $|x'-x''|<\delta$ עבור $x',x''\in[a,+\infty)$ מתקיים
$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$

$\boxed{741}$ נתונה פונ' $f(x)=x+\sin x$ על $X=\mathbb{R}$.

$f(x)$ אינה חסומה על $X=\mathbb{R}$, הוכח ש $f(x)$ רציפה במידה שווה על X.

$$\forall\varepsilon>0\quad |f(x')-f(x'')|=|x'-x''+\sin x'-\sin x''|\le$$

$$\le|x'-x''|+|\sin x'-\sin x''|=$$

$0<|x|<\frac{\pi}{2}\Rightarrow|\sin x|<|x|$

$|\cos x|\le 1$

$$=|x'-x''|+2\cdot\left|\sin\frac{x'-x''}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x'+x''}{2}\right|<$$

$$<|x'-x''|+2\cdot\left|\frac{x'-x''}{2}\right|\cdot 1=2|x'-x''|<\varepsilon$$

אז עבור $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ (מצאנו!)

$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\Leftarrow|x'-x''|<\delta$

$\boxed{742}$ נתון $f(x)=x^2$. הוכח ש $f(x)$ רציפה במידה שווה

(א) בקטע $(-\ell,\ell)$, $\ell>0$, (ב) על $X=(-\infty,+\infty)$.

(א) $|f(x')-f(x'')|=|x'^2-x''^2|=|x'-x''|\cdot|x'+x''|\le$

$\le|x'-x''|\cdot(|x'|+|x''|)<|x'-x''|\cdot(\ell+\ell)=2\ell|x'-x''|$.

ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{2\ell}$. אז עבור $|x'-x''|<\delta$ $\Leftarrow$ $|x'^2-x''^2|<\varepsilon$.

ז.א. $f(x)=x^2$ רציפה במידה שווה ב $(-\ell,\ell)$.

אפשר היה להגיע לאותה מסקנה בעזרת משפט קנטור.

$f(x)=x^2$ רציפה עבור $\forall x\in\mathbb{R}$. ז.א. $f(x)=x^2$ רציפה במידה שווה ב $[-\ell,\ell]$. אך $(-\ell,\ell)\subset[-\ell,\ell]$. אז $f(x)=x^2$ רציפה במידה שווה ב $(-\ell,\ell)$

חדו"א 1-א 201-1-0011 טניה וקסמן

הנושא: רציפות במידה שווה (המשך)

$\boxed{\text{המשך } 742}$

(ג) $X=(-\infty,+\infty)$

$$x_n'=n+\frac{1}{n}\to+\infty \qquad x_n''=n\to+\infty$$

$$|x_n'-x_n''|=\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|x_n'^2-x_n''^2|=\left(n+\frac{1}{n}\right)^2-n^2=$$

$$=n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2=2+\frac{1}{n^2}>2\geq\varepsilon$$

מצאנו ל- $0<\varepsilon\leq 2$ כך שמתקיים 736.

$f(x)=x^2$ אינה רציפה במידה שווה על $X=(-\infty,+\infty)$.

$\boxed{743.}$ נתון: $f(x)=\dfrac{x}{4-x^2}$, $X=[-1,1]$, $-1\leq x\leq 1$

$f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$ חוץ מ $x=\pm 2$.

ע.כ. $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[-1,1]$. לפי משפט קנטור $f(x)$ רציפה במידה שווה ב $[-1,1]$.

$\boxed{744}$

$f(x)=\ln x$, $0<x<1$, $X=(0,1)$.

$$x_n'=e^{-n}=\frac{1}{e^n}\xrightarrow{n\to\infty}0 \qquad x_n''=e^{-n-1}=\frac{1}{e^{n+1}}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$|x_n'-x_n''|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=|\ln e^{-n}-\ln e^{-n-1}|=$$

$$=|-n+n+1|=1\geq\varepsilon$$ עבור $\forall\, 0<\varepsilon\leq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)=\ln x$ אינה רציפה במידה שווה על $X=(0,1)$ (לפי 736)

חדו"א-1 201-1-0011 טניה וקסמן

הנושא: רציפות במידה שווה (המשך)

$\boxed{745}$ נתון $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $0<x<\pi$

$X=(0,\pi)$

נגדיר פונ' $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & 0<x\le\pi\\ 1 & , x=0\end{cases}$$

ידוע לנו כי $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

לכן פונ' $F(x)$ רציפה בקטע $[0,\pi]$. לפי משפט קנטור, $F(x)$ רציפה במידה שווה ב $[0,\pi]$.

$(0,\pi)\subset[0,\pi]$, לכן $F(x)$ רציפה במידה שווה גם ב $(0,\pi)$

ושם $f(x)\equiv F(x)$.

$\boxed{746}$ נתון $f(x)=e^x\cdot\cos\frac{1}{x}$, $0<x<1$, $X=(0,1)$:

$$x_n'=\frac{1}{2\pi n}\to 0\quad x_n''=\frac{2}{\pi(2n+1)}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}(2n+1)}\to 0$$

$$|x_n'-x_n''|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$|f(x_n')-f(x_n'')|=\left|e^{x_n'}\cos 2\pi n-e^{x_n''}\cos\frac{\pi}{2}(2n+1)\right|=$$

$$=e^{x_n'}=e^{\frac{1}{2\pi n}}>1\geqslant\varepsilon$$

כאשר $0<\varepsilon\le 1$.

מסקנה: $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה ב $(0,1)$

(לפי 736)

בס"ד

טניה וקסמן   201-1-0011   חדו"א 1-א

הנושא: רציפות במידה שווה.

$\boxed{747}$

$$X=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty) \quad f(x)=\operatorname{arctg} x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

! $f(x)$ רציפה על X.

לפי 740 $f(x)$ רציפה במידה שווה על $\mathbb{R}$.

פתרון אחר (לפי 1242)

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad x\in\mathbb{R}.$$

לכן $f(x)=\operatorname{arctg} x$ רציפה במידה שווה על $\mathbb{R}$.

$\boxed{748}$

$$X=[1,+\infty) \quad x\geq 1 \quad f(x)=\sqrt{x}$$

$$|f(x')-f(x'')|=|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}} \leq$$

$$x'\geq 1 \quad \sqrt{x'}\geq 1 \quad x''\geq 1 \quad \sqrt{x''}\geq 1 \quad \sqrt{x'}+\sqrt{x''}\geq 2$$

$$\leq \frac{|x'-x''|}{2} < \varepsilon \implies \delta = 2\varepsilon$$

ז.א. עבור $|x'-x''|<\delta \Longleftarrow$ $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

$f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה על $[1,+\infty)$

פתרון אחר (לפי 1242)

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \leq \frac{1}{2}$$

לכן $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה במידה שווה על $[1,+\infty)$.

$\boxed{749}$

$$X=[0,+\infty) \quad x\geq 0 \quad f(x)=x\cdot\sin x$$

$$x_n'=2\pi n+\frac{1}{n}\to\infty \quad x_n''=2\pi n \quad |x_n'-x_n''|=\frac{1}{n}\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

בס"ד

סניה וקסמן 201-1-0011 חדו"א 1-א

הנושא: רציפות במידה שווה.

$\boxed{\text{749 המשך}}$

$$\left|f(x_n')-f(x_n'')\right| = \left|\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)\sin\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)-2\pi n\cdot \sin 2\pi n\right| =$$

$$=\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}\cdot\left(2\pi n+\frac{1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\sin 1/n}{1/n}\left(2\pi+\frac{1}{n^2}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{} 2\pi$$

ניקח $\varepsilon=\pi$ $\Leftarrow$ $\exists N$: $n>N$

$$\pi=2\pi-\varepsilon < \left|f(x_n')-f(x_n'')\right| < 2\pi+\varepsilon \Longrightarrow$$

$\forall n>N$ $\left|f(x_n')-f(x_n'')\right| > \pi$ עבור $\varepsilon=\pi$

$f(x)=x\cdot\sin x$ אינה רציפה במידה שווה על $X=[0,+\infty)$

$\boxed{750}$ $X_1=(0,1)$, $X_2=(-1,0)$ $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$

$$X=X_1\cup X_2 = (-1,1)\setminus\{0\}$$

הוכח כי $f(x)$ רציפה במידה שווה על X_1 ו X_2

אך אינה רציפה במידה שווה על X.

<u>הוכחה:</u>

נתבונן ב-2 פונקציות $f_1(x)$, $f_2(x)$

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & 0<x\le 1\\ 1, & x=0\end{cases} \qquad f_2(x)=\begin{cases} f(x), & -1\le x<0\\ -1, & x=0\end{cases}$$

פונ' $f_1(x)$ רציפה בקטע סגור $[0,1]$. לפי משפט קנטור $f_1(x)$ רציפה במידה שווה ב $[0,1]$, אך $(0,1)\subset[0,1]$, לכן $f_1(x)$ רציפה במידה שווה גם ב $(0,1)$, אך שם $f_1(x)\equiv f(x)$.

באופן דומה $f(x)$ רציפה במשוה שווה ב? $(-1,0)$ $f_2(x)=f(x)$ $(-1;0)$?

נתבונן ב $X=(-1,1)\setminus\{0\}$. ניקח

$x_n'=-\frac{1}{n}\in(-1,0)$ $\quad \left|x_n'-x_n''\right| = \frac{2}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$x_n''=\frac{1}{n}\in(0,1)$

$$\left|f(x_n')-f(x_n'')\right| = \left|2n\cdot\sin\frac{1}{n}\right| = 2\cdot\frac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}\longrightarrow 2 \Rightarrow$$

$\exists N$: $\left|f(x_n')-f(x_n'')\right| > 1$ עבור $\varepsilon=1$

לפי 736 $f(x)$ אינה רציפה במידה שווה על X.

בס"ד

טניה וקסמן 201-1-0011 חדו"א 1-א

$\boxed{751}$

הנושא: רציפות במידה שווה.

נתון: $f(x)$ רציפה במידה שווה על $(a,c]$ ו- $[c,b)$.

הוכח כי $f(x)$ רציפה במידה שווה גם על (a,b).

הוכחה

$\forall \varepsilon > 0$

$(a,c]$ $\exists \delta_1 > 0 \quad \forall x', x'' \in (a,c] \quad |x'-x''| < \delta_1 \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$

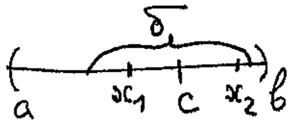
$[c,b)$ $\exists \delta_2 > 0 \quad \forall x', x'' \in [c,b)$
$|x'-x''| < \delta_2 \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$

נסמן $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

נתבונן ב- (a,b)

מקרה לא טריוויאלי: $x_1 \in (a,c]$

$x_2 \in [c,b)$



נבחר x_1, x_2 כך ש $|x_1 - x_2| < \delta$. אז

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - f(c) + f(c) - f(x_2)| \le$$

$$\le \underbrace{|f(x_1) - f(c)|}_{|x_1 - c| < \delta} + \underbrace{|f(x_2) - f(c)|}_{|c - x_2| < \delta} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

יש לציין גם במקרים טריוויאליים $x', x'' \in (a,c]$ ו- $x', x'' \in [c,b)$

ז.א. $f(x)$ רציפה במידה שווה על איחוד $(a,c]$ ו- $[c,b)$.

בס"ד

טניה וקסמן 201-1-0011 חדו"א א-1

הנושא: רציפות במידה שווה.

$\boxed{760}$ נתון: פונקציה $f(x)$ מונוטונית וחסומה רציפה ב (a,b) ויכול להיות ש $a=-\infty$ ו/או $b=+\infty$

הרי $f(x)$ רציפה במידה שווה ב (a,b).

הוכחה

נניח כי $f(x)$ מונוטונית עולה ב (a,b).

טענה: (1) $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \operatorname{Inf}\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\} = m$.

$\lim\limits_{x\to b-} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{x\in(a,b)}\{f(x)\} = M$ (2)

נוכיח (2). פונ' $f(x)$ חסומה, לכן M מספר. לפי הגדרת Sup

1) $f(x) \le M$

2) $\forall \varepsilon>0 \quad \exists\ f(x_\varepsilon),\ f(x_\varepsilon) > M-\varepsilon,\ x_\varepsilon\in(a,b)$

נסמן $b - x_\varepsilon = \delta$.

$\forall x \in (x_\varepsilon, b) \implies |x-b|<\delta,$

$x > x_\varepsilon \implies f(x) \ge f(x_\varepsilon) > M-\varepsilon$

$0\le M-f(x)<\varepsilon \iff M-f(x) = |f(x)-M| < \varepsilon$

כאשר $|x-b|<\delta$. לכן $\lim\limits_{x\to b-} f(x) = M$.

נניח כי קטע (a,b) סופי. אזי

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = m = f(a)$

$\lim\limits_{x\to b-} f(x) = M = f(b)$

ז.א. $f(x)$ רציפה בקטע סגור $[a,b]$.

לכן לפי משפט קנטור $f(x)$ רציפה במידה שווה ב $[a,b]$ ו ב (a,b)

אם אחד מקצוות אינו סופי לדוגמא $b=+\infty$, הרי הוכחנו כי

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{Sup}\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\} = M.$

אז לפי 740 $f(x)$ רציפה במידה שווה ב $[a,+\infty)$.