תרגול 6

הנושא: קריטריון קושי. הגבול העליון. הגבול התחתון.

תרגילים: 72-75 , 77 ,

הוכח את התכנסות הסדרות הבאות באמצעות מבחן קושי:

(72) $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, כאשר $|a_k| < M$, $k=0,1,\ldots$, $|q|<1$

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת $\iff \forall \varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}\quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

$|x_{n+p}-x_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \ldots + a_{n+p}q^{n+p}| \le$

$\le |a_{n+1}|\cdot|q|^{n+1} + |a_{n+2}|\cdot|q|^{n+2} + \ldots + |a_{n+p}|\cdot|q|^{n+p} <$

$< M\cdot|q|^{n+1} + M\cdot|q|^{n+2} + \ldots + M\cdot|q|^{n+p} = M\cdot|q|^{n+1}\cdot(1+|q|+\ldots+|q|^{p-1}) =$

$= M\cdot|q|^{n+1}\cdot\dfrac{1-|q|^p}{1-|q|} < \dfrac{M}{1-|q|}\cdot|q|^{n+1} < \varepsilon$

עבור n מספיק גדול.

במלים אחרות: $\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}\quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

(73) $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{2^n}$

$|x_{n+p}-x_n| = \left|\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dfrac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \dfrac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \le$

$\le \dfrac{1}{2^{n+1}}\left(1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{2^{p-1}}\right) = \dfrac{1}{2^{n+1}}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^p}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2^n}\cdot\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^p\right) <$

$< \dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$,

$\forall\varepsilon>0\ \exists N: \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}\quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$

(74) $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$

$|x_{n+p}-x_n| = \left|\dfrac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \dfrac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right| \le$

$\le \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} + \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \dfrac{1}{(n+p)(n+p+1)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} + \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3} + \ldots +$

$\dfrac{1}{n+p} - \dfrac{1}{n+p+1} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+p+1} < \dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$

$n+1 > \dfrac{1}{\varepsilon}, \quad n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = N$

$\forall\varepsilon>0\ \exists N=\dfrac{1}{\varepsilon}-1\ \forall n>N, \forall p\in\mathbb{N}\quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon.$

(75) $x_n = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{n^2}$

רמז: $\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ $n \geq 2$

$$|x_{n+p}-x_n| = \left| \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\dots+\frac{1}{(n+p)^2} \right| <$$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\dots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} = N$$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N=\frac{1}{\varepsilon} : \forall n>N, \ \forall p\in\mathbb{N} \quad |x_{n+p}-x_n| < \varepsilon.$$

(77) נסח בצורה פוזיטיבית את התנאי כי סדרה נתונה אינה מקיימת את מבחן קושי. הוכח כי הסדרה $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$ אינה מתכנסת.

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists N : \quad \forall n>N, \ \forall p\in\mathbb{N} \quad |x_{n+p}-x_n| < \varepsilon$$

$$\exists \varepsilon_0>0 \ \forall N : \quad \exists n_0>N \quad \exists p\in\mathbb{N} \quad |x_{n+p}-x_n| \geq \varepsilon$$

$$|x_{n+p}-x_n| = \left| \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+p} \right| > \frac{p}{n+p}$$

ניקח $p=n$, ונקבל

$$|x_{n+p}-x_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2} \quad \forall N \quad \exists n>N, \ \exists p=n \quad : |x_{n+p}-x_n| \geq \varepsilon.$$

עבור כל אחת מהסדרות הבאות חשב את: $\inf_n\{x_n\}$, $\sup_n\{x_n\}$, $\varliminf_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup_{n\to\infty} x_n$

(90) $x_n = 1-\frac{1}{n}$.

$\{x_n\}$ מונוטונית עולה וחסומה באמת, $x_{n+1}-x_n = 1-\frac{1}{n+1}-1+\frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0,$

לכן היא מתכנסת, $x_{n+1} > x_n$, $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0 \leq x_n < 1.$

לכן כל הגבולות החלקיים שווים. $\inf_n\{x_n\} = x_1 = 0 = \min_n\{x_n\}$

לפי המשפט: סדרה מונוטונית עולה וחסומה מתכנסת ל sup שלה

(מונוטונית יורדת וחסומה ← ל-inf שלה), $\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \sup_n\{x_n\} = 1$

$$\sup_n x_n = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 1.$$

(93) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cdot\cos\frac{n\pi}{2}$

יש להוציא 3 תתי-סדרות. $x_{4k-2} = 1-\frac{4k-2}{4k-1}$, $x_{2k-1} = 1$, $x_{4k} = 1+\frac{4k}{4k+1}$

אזי: $1-\frac{4k-2}{4k+1} < 1 < 1+\frac{4k}{4k+1}$

$$x_{4k-2} < x_{2k-1} < x_{4k}$$

$\{x_{4k}\}\uparrow$ וחסומה: $1 < x_{4k} = 1+\frac{4k}{4k+1} < 1+\frac{4k}{4k} = 2, \quad \forall k$

לכן $\sup_n\{x_n\} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k} = \lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{4k}{4k+1}\right) = 2$

$\{x_{4k-2}\}\downarrow$ וחסומה: $1 > 1-\frac{4k-2}{4k-1} = 1-\frac{4k-1-1}{4k-1} = 1-1+\frac{1}{4k-1} > 0$

לכן $\inf_n\{x_n\} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k-2} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{4k-2}{4k-1}\right) = 0$

(למה $\exists$ sup , inf של $\{x_n\}$. כי ~~היא חסומה מלמעלה~~ קבוצת האיברים של $\{x_n\}$ חסומה מלמעלה ולמטה. $\sup_n x_n$ נמצא בין איברי x_{4k} או בגבול שלה. $\{x_{4k}\}\uparrow$ לכן היא מתכנסת ל- sup שלה. $\{x_{4k-2}\}\downarrow$, לכן היא מתכנסת ל- inf שלה ול- inf של סדרה כולה)

(103) חשב את $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$, $\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n$

$$x_n = \frac{n}{n+1}\cdot\sin^2\frac{n\pi}{4}$$

$x_{4k} = 0$, $x_{4k-2} = \frac{4k-2}{4k-1}\sin^2\frac{(4k-2)\pi}{4} = \frac{4k-2}{4k-1}\sin^2\left(\pi k-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4k-2}{4k-1}\cos^2\pi k = \frac{4k-2}{4k-1}$

$x_{4k-1} = \frac{4k-1}{4k}\sin^2\frac{(4k-1)\pi}{4} = \ldots\sin^2\left(\pi k-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4k-1}{4k}$

$x_{4k-3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4k-3}{4k-2}$ (באופן דומה)

$$\frac{4k-1}{4k} - \frac{4k-3}{4k-2} = \frac{(4k-1)(4k-2)-4k(4k-3)}{4k(4k-2)} = \frac{2}{4k(4k-2)} > 0$$

קיבלנו: $x_{4k} < x_{4k-3} < x_{4k-1} < x_{4k-2}$

$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k} = 0$

$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \lim_{k\to\infty} x_{4k-2} = \lim_{k\to\infty}\frac{4k-2}{4k-1} = \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{4k-1}\right) = 1-\lim_{k\to\infty}\frac{1}{4k-1} = 1.$

תרגיל: (מבחן 2002, מועד א').

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת מספרים החסומה מלמעלה וכך שאין בסדרה את איבר מקסימלי. הוכח ש-

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \sup_{1\le n<\infty} a_n$$

<u>הוכחה:</u>

1) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלמעלה $\Leftarrow$ $\exists \sup_n a_n = L$. $\Longleftrightarrow$

1) $a_n < L$, $\forall n$

2) $\forall k\ \exists n_k : L-\frac{1}{k} < a_{n_k} < L$

נעשה מעבר גבולי:

$$\lim_{k\to\infty}\left(L-\frac{1}{k}\right) \le \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \le \lim L$$

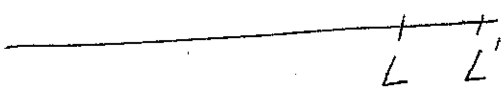
$$L \le \lim a_{n_k} \le L$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = L$$

קיבלנו תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ של סדרה $\{a_n\}$ המתכנסת ל-L.

$\Leftarrow$ L - גבול חלקי של $\{a_n\}$.

2) נראה ש- $L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$.



נניח כי $\exists L' > L$, $L' = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$. ז.א. קיימת תת-סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול זה, אבל כל איברי הסדרה אינם גדולים מ-L. ז.א. L' לא יכול להיות גבול חלקי של הסדרה הנתונה.

לכן

$$\sup_{1\le n<\infty} a_n = L = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

(121) א) הוכח כי לכל שתי סדרות $\{x_n\}$, $\{y_n\}$:

$$\underbrace{\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}} (x_n+y_n)}_{1} \le \underbrace{\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} y_n}_{2}$$

1) קודם כל נשים לב כי אם לקחנו מהסדרה $\{x_n\}$ תת סדרה כלשהי $\{x_{n_k}\}$ אזי

(A) $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n \le \underline{\lim_{n\to\infty}} x_{n_k}$

$\exists$ תת-סדרה $\{x_{r_n}+y_{r_n}\}$ מתכנסת של הסדרה $\{x_n+y_n\}$ כך ש

(B) $\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{r_n}+y_{r_n})$

(C) $\exists$ תת-סדרה $\{x_{m_{r_n}}\}$ מתכנסת כך ש $\underline{\lim_{n\to\infty}} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}$

אזי:

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_n \overset{(A)}{\le} \underline{\lim_{n\to\infty}} x_{r_n} + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_{r_n} \overset{(C)}{=} \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_{r_n} \overset{(A)}{\le}$$

$$\overset{(A)}{\le} \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \underline{\lim_{n\to\infty}} y_{m_{r_n}} \;=$$

סדרה $\{x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}}\}$ היא תת-סדרה של סדרה מתכנסת $\{x_{r_n}+y_{r_n}\}$, אזי

(D) $\lim_{n\to\infty}(x_{r_n}+y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}})$

$\{x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}}\}$ מתכנסת (כתת-סדרה של סדרה מתכנסת)

$\{x_{m_{r_n}}\}$ מתכנסת לפי (C), אזי הפרש שלהם $\{y_{m_{r_n}}\}$ מתכנס,

לכן

(E) $\underline{\lim_{n\to\infty}} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} + \lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}}) \overset{(D),(B)}{=} \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$$

2) נניח $\{y_n\}$ קבוצת גבולות חלקיים של סדרה $\{y_n\}$. לפי תרגיל 17

$\inf_n(-y_n) = -\sup_n(y_n)$ נעבור לגבול

$\lim_{n\to\infty}\inf_n(-y_n) = -\lim_{n\to\infty}\sup_n(y_n)$

זה לפי הגדרה: $\underline{\lim_{n\to\infty}}(-y_n) = -\overline{\lim_{n\to\infty}} y_n$

המשך ←

לכן (2) מסק (1) ב

(קרבוק 7.1)

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)-\varlimsup_{n\to\infty}y_n = \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)+\varliminf_{n\to\infty}(-y_n) \leq$$

$$\leq \varliminf_{n\to\infty}\left(x_n+y_n+(-y_n)\right)=\varliminf_{n\to\infty}x_n$$

קיבלנו ש

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq \varliminf_{n\to\infty}x_n+\varlimsup_{n\to\infty}y_n$$

מ.ש.ל.

תן דוגמאות שבהן ביחסים אלה מתקיימים אי-שוויונים חזקים.