(1) $0 \le x_n \le x_1 + \dots + x_n = n x_1 \Rightarrow 0 \le \frac{x_n}{n} \le x_1$ (127)

לכן הסדרה $\frac{x_n}{n}$ חסומה וקיים $\alpha = \inf\{\frac{x_n}{n}\}$

יהי $0<\varepsilon$ אז קיים m כך ש $\alpha \le \frac{x_m}{m} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2}$

לכל $m<n$ מתקיים כי $n = qm + r$ (חלוקה עם שארית)

כאשר $r = 0,1,2,\dots,m-1$

אז

$$x_n = x_{qm+r} \le x_m + x_m + \dots + x_m + x_r = q \cdot x_m + x_r$$

אז/

$$\frac{x_n}{n} = \frac{x_{qm+r}}{qm+r} \le \frac{q x_m + r}{qm+r} = \frac{x_m}{m}\,\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n}$$

$$\alpha \le \frac{x_n}{n} < \left(\alpha + \frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{qm}{qm+r} + \frac{x_r}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{x_r}{n}.$$

הרי / $0 \le r \le m-1$, ולכן $\{x_r\}_{r=0}^{m-1}$ - קבוצה סופית,
יש בה איברים חסומים/ וקיים N כך שלכל $n>N$ $0 < \frac{x_r}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$

לכן אז

$$\alpha \le \frac{x_n}{n} < \alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon \quad \forall n > N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = \alpha$$

כפי שרצינו!

$\{X_n\}$ - מתכנסת, ונניח כי X - הגבול של X_n.

$$\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

נגדיר

נוכיח כי ξ_n מתכנס ל-X, לפי הגדרה.

יהי $\varepsilon > 0$. קיים אז N_0 כך שלכל $n > N_0$ מתקיים: $|x_n - x| < \varepsilon$.

אז

$$|\xi_n - x| = \left|\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - x\right| =$$

$$= \left|\frac{x_1 - x + x_2 - x + \dots + x_n - x}{n}\right| \le \frac{|x_1 - x|}{n} + \frac{|x_2 - x|}{n} + \dots + \frac{|x_n - x|}{n} \le$$

$$\le \max\left\{\frac{|x_1 - x|}{n}, \dots, \frac{|x_{N_0} - x|}{n}\right\} \cdot N_0 + (n - N_0)\frac{\varepsilon}{n} =$$

נסמן - $M = \max\{|x_1 - x|, \dots, |x_{N_0} - x|\}$

$$= \frac{M \cdot N_0}{n} + (n - N_0)\frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon + \frac{M - N_0\varepsilon}{n}$$

אם נבחר n גדול כך ש- $\varepsilon + \frac{M - N_0\varepsilon}{n} < 2\varepsilon$, נקבל N_1 כך שלכל $n > N_1$: $|\xi_n - x| < 2\varepsilon$

לכן לפי הגדרה הגבול x הוא גבול של סדרה ξ_n. מש"ל.

(130) אי-שוויון הממוצעים

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} = S_n$$

ידוע לפי כי אם $x_n \to x$ אז (128)

$$S_n = \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \longrightarrow x$$

באותה דרך מוכיחים כי

$$\gamma_n = \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} \longrightarrow \frac{1}{x}$$

לכן

$$\underset{\downarrow \atop x}{\frac{1}{\gamma_n}} \le \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \underset{\downarrow \atop x}{S_n}$$

לפי סנדוויץ' שואף ל-x.

(131) נגדיר סדרה $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n}$

נתון כי הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim y_n = y$ קיים.

לפי תרגיל 130;

$$\lim \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} = \lim y_n = y$$

לכן אומר כי

$$\lim \sqrt[n]{y_1 y_2 \cdots y_n} = \lim \sqrt[n]{\frac{x_2}{1}\,\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_{n+1}}{x_n}} = \lim \sqrt[n]{x_{n+1}} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

déa

נסמן:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = \sqrt[n]{x_n}, \quad x_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\frac{n^n}{n!}}{\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-1)!}} = \lim\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = e$$

ולכן

$$\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = e$$