אוניברסיטת בן-גוריון בנגב | הפקולטה למדעי הטבע
Ben-Gurion University of the Negev | המחלקה למתמטיקה
Department of Mathematics

בחינה בקורס יסודות האנליזה להנדסת חשמל 1, תאריך 09.02.2020, מועד א'
מספר הקורס: 201-2-5331
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

Exam in the course: Fundamentals of Analysis for EE-1, date: 09.02.2020
Course number: 201-2-5331
Lecturer: Prof Arkady Leiderman

- משך הבחינה: 3 שעות.
- חומר עזר המותר: 2 דפי רשימות בגודל סטנדרטי A4. **אין להשתמש מחשבון.**
- יש לענות על כל 4 שאלות. משקל של כל שאלה/סעיף רשום בשאלון.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם! <u>אף שאלה בשאלון לא דורשת פתרון ארוך או מסובך.</u>
- אפשר להשתמש **ללא הוכחה** בכל טענה שנלמדה בשיעורים או בעבודות בית.
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע / לא יודעת"** ולקבל 20% מהנקודות של שאלה/סעיף (פרט לשאלה 3 ג').
- שאלות/סעיפים בהם עניתם "לא יודע/ת" לא ייבדקו.

- Duration of exam: 3 hours.
- Tools for help: it is allowed to bring two lists (standard size A4) of notes written by a student. **The use of a calculator is not allowed.**
- Please give answers to all 4 questions. The grade of each question / paragraph is clearly indicated.
- Please explain in details the solutions! <u>No question below requires a long and complicated proof.</u>
- You can use **without proof** any claim, which was proved in the lectures or in the home-works.
- Instead of presenting a solution of any question / paragraph you can write **"I don't know"**. Then you will obtain 20% of the grade of that question / paragraph (except for the question 3(c)).
- Question / paragraph where "I don't know" is answered, will not be checked.

N of exam____________

שאלה 1

(א) (10 נקודות) יהי (X,d) מרחב מטרי כלשהו. הוכיחו כי לכל 4 נקודות $a,b,a',b'\in X$ מתקיים אי-שוויון $|d(a,b)-d(a',b')|\le d(a,a')+d(b,b')$.

(ב) (15 נקודות) נניח כי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty};\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ הן 2 סדרות Cauchy במרחב מטרי (X,d).

בעזרת תוצאה של סעיף (א) ותכונות של סדרות Cauchy ב R הוכיחו כי סדרה מספרית $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ב R.

שאלה 2

(א) (20 נקודות) תהי $f(x):R^n\to M$ פונקציה רציפה מוגדרת במרחב אוקלידי R^n עם ערכים במרחב מטרי M.

בעזרת תכונות של קבוצות קומפקטיות הוכיחו כי לכל קבוצה חסומה $A\subset R^n$ תמונתה $f(A)=\{f(a):a\in A\}\subset M$ זאת קבוצה חסומה ב M.

(ב) (5 נקודות) תהי $f(x):X\to R$ פונקציה רציפה כאשר $X\subset R$ היא קבוצה פתוחה וחסומה ב R.

האם תמיד $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ זאת קבוצה חסומה ב R?

שאלה 3

נזכיר כי m^* מסמנת מידה חיצונית ב R. (אם A זו קטע אז $m(A)$ שווה לאורך של קטע).

(א) (20 נקודות) תהי $E\subset[0,1]$ קבוצה כלשהי. נניח כי $m^*(E)+m^*([0,1]\setminus E)=1$.

על פי הגדרה של קבוצה מדידת Lebesgue הוכיחו כי E קבוצה מדידה.

(ב) (5 נקודות) תהי $E\subset[0,1]$ קבוצה כלשהי. האם יתכן כי $m^*(E)+m^*([0,1]\setminus E)<1$? נמקו תשובתכם.

(ג) (10 נקודות -בונוס) תהי $E\subset[0,1]$ קבוצה כלשהי. האם יתכן כי $m^*(E)+m^*([0,1]\setminus E)>1$? נמקו תשובתכם.

שאלה 4

תהי μ מידה של Lebesgue ב R.

(א) (15 נקודות) נניח כי $f(x):[0,1]\to R$ פונקציה רציפה בכל נקודות של קטע סגור $[0,1]$.

נגדיר סדרה של פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ באופן הבא: לכל n טבעי $f_n(x)=f(\frac{n}{n+1}x)$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{[0,1]}|f_n(x)-f(x)|d\mu=0$

(ב) (10 נקודות) נתבונן בפונקציה רציפה הבאה: $f(x)=\dfrac{1}{x}:(0,1]\to R$. נגדיר כמו בסעיף (א)

לכל n טבעי $f_n(x)=f(\frac{n}{n+1}x)$. האם מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{(0,1]}|f_n(x)-f(x)|d\mu=0$?

בהצלחה!

09.02.2020

Question 1.

(a) (10 points) Let (X,d) be any metric space. Prove that for every 4 points $a,b,a',b' \in X$ the following inequality holds: $|d(a,b)-d(a',b')| \le d(a,a')+d(b,b')$.

(b) (15 points) Assume that $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}; \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ are two Cauchy sequences in a metric space (X,d). With the help of result of (a) and properties of Cauchy sequences in R prove that the sequence of numbers $\{d(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converges in R.

Question 2.

(a) (20 points) Let $f(x): R^n \to M$ be a continuous function defined on the Euclidean space R^n with the values in a metric space M. With the help of properties of compact sets prove that for every bounded set $A \subset R^n$ its image $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subset M$ is a bounded set in M.

(b) (5 points) Let $f(x): X \to R$ be a continuous function, where $X \subset R$ is an open bounded set in R. Is it true that $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$ is always a bounded set in R?

Question 3.

Recall that m^* denotes the outer measure in R.
(If A is an interval then $m(A)$ is equal to the length of A).

(a) (20 points) Let $E \subset [0,1]$ be any set. Assume that $m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E) = 1$.
By definition of a Lebesgue measurable set, prove that E is measurable.

(b) (5 points) Let $E \subset [0,1]$ be any set. May it happen that $m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E) < 1$?
Provide an argument to your answer.

(c) (10 points - bonus) Let $E \subset [0,1]$ be any set. May it happen that $m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E) > 1$?
Provide an argument to your answer.

Question 4.

Let μ denote the Lebesgue measure in R.

(a) (15 points) Assume that $f(x): [0,1] \to R$ is a continuous function at every point of the closed interval $[0,1]$. Define the following sequence of functions: $f_n(x) = f(\frac{n}{n+1}x)$ for every natural n.

Prove that $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$.

(b) (10 points) Consider the following continuous function $f(x) = \dfrac{1}{x} : (0,1] \to R$.

Define as in (a) : $f_n(x) = f(\frac{n}{n+1}x)$ for every natural n. Does $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{(0,1]} |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$ hold?

Good luck!

09.02.2020

Solutions.

Question 1 By triangle inequality,

(a) $$d(a,b) \leq d(a,a') + d(a',b') + \underset{d(b,b')}{\underset{\parallel}{d(b',b)}}$$

Therefore, $d(a,b) - d(a',b') \leq d(a,a') + d(b,b')$ (1)

Similarly, $d(a',b') \leq \underset{d(a,a')}{\underset{\parallel}{d(a',a)}} + d(a,b) + d(b,b')$

Therefore, $-d(a,b) + d(a',b') \leq d(a,a') + d(b,b')$ (2)

Inequalities (1) and (2) give that
$$|d(a,b) - d(a',b')| \leq d(a,a') + d(b,b')$$

(b) We show that the sequence of numbers $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence.

Indeed,
$$|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| \leq d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m)$$
by the result of part (a). Let $\varepsilon > 0$.

Fix natural n^* such that $\forall n, m > n^*$ both $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ and $d(y_n, y_m) < \varepsilon/2$.

Then $\forall n, m > n^*$ $|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| < \varepsilon$.

So, $\{d(x_n, y_n)\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in $\mathbb{R}$, therefore converges in $\mathbb{R}$.

Question 2 (a) Let $A \subset \mathbb{R}^n$ is bounded. Then there is a closed ball $B \subset \mathbb{R}^n$ such that $A \subset B$. B is a closed ball in $\mathbb{R}^n$, therefore B is a compact set. Its continuous image $f(B)$ is a compact subset of a metric space M. Compact subset of any metric space is bounded. Finally, $f(A) \subset f(B)$ is also bounded since a subset of bounded set is bounded.

(b) Consider $f: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ defined by $f(x) = tg\, x$. Then $X = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ is bounded in $\mathbb{R}$ and its image $f(X) = \mathbb{R}$ is not bounded

Question 3 (a) Denote $m^*(E) = m$. Then $m^*([0,1] \setminus E) = 1 - m$. By definition,

$$m^*([0,1] \setminus E) = \inf \{ m(U) : [0,1] \setminus E \subset U, \ U \text{ is open} \}$$

For any $\varepsilon > 0$ there is an open U such that $[0,1] \setminus E \subset U$ and

$$m(U) < 1 - m + \varepsilon,$$

or, equivalently, $m < 1 - m(U) + \varepsilon$

Define $K = [0,1] \setminus U$. Then K is closed in $[0,1]$, therefore $K \subset U$ is compact. We obtain that $m^*(K) = 1 - m(U)$.

for any $\varepsilon > 0$ there is a compact subset $K \subset E$ such that $m^*(E) < m^*(K) + \varepsilon$.

By definition, this means that E is a Lebesgue measurable set.

(b) $[0,1] = E \uplus ([0,1] \setminus E)$.

It is proved in the course that for $\forall A, B$. if $A \cap B = \emptyset$, then $m^*(A \uplus B) \le m^*(A) + m^*(B)$.

So, always,

$$1 = \mu([0,1]) = m^*(E \uplus ([0,1] \setminus E)) \le m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E).$$

$m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E) < 1$ cannot happen.

(c) Let $E \subset [0,1]$ be any non-measurable set. For instance, $E = V$ - Vitali set.

Then $m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E) = 1$ is not possible by the result of (a).

$m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E) < 1$ is not possible by the result of (b).

So, there is only one possibility:

$$m^*(E) + m^*([0,1] \setminus E) > 1.$$

It happens for every nonmeasurable set E.

<u>Question 4</u> (a) For every x we have that

$\frac{n}{n+1} x \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Since $f(x)$ is continuous

at every point we obtain that for every x

$f(\frac{n}{n+1} x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

This means that $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$ for every x.

Observe that $f(x)$ is a bounded function

since $f(x)$ is a continuous function defined

on a compact set $[0,1]$. So, there is

a constant M such that

$\forall x \in [0,1]$ $|f(x)| \le M$. Then $\forall x \in [0,1]$

$\forall n \in N$ $|f_n(x)| \le M$ and therefore

$|f_n(x) - f(x)| \le 2M$.

$f_n(x) - f(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ $\forall x \in [0,1]$.

All conditions of the Lebesgue Dominated Convergence Theorem are fulfilled, and therefore, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{[0,1]} |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$. $f_n(x) = \frac{1}{\frac{n}{n+1} x} = \frac{n+1}{n} \frac{1}{x}$.

So, $f_n(x) - f(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{x}$.

$\int_{(0,1]} |f_n(x) - f(x)| d\mu = \frac{1}{n} \int_{(0,1]} \frac{1}{x} d\mu = \infty$ $\forall n \in N$.

So, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{(0,1]} |f_n(x) - f(x)| d\mu = \infty \neq 0$.