אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון יסודות האנליזה להנדסת חשמל1 , תאריך 06.02.2019, מועד א'
מספר הקורס: 201-2-5331
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על כל 4 שאלות. משקל של כל שאלה הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- חומר עזר המותר: 2 דפי רשימות בגודל סטנדרטי A4. **אין מחשבון.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

**מספר הנבחן** ______________

## שאלה 1

(א) (10 נקודות) תהי $X \subset R\setminus\{0\}$ קבוצה כלשהי. נגדיר $d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|$ לכל $x,y\in X$.

הוכיחו כי $d$ מגדירה מטריקה בקבוצה $X$.

(ב) (10 נקודות) תהי $X=(0,1]$. מטריקה $d$ מוגדרת בסעיף (א). הוכיחו כי $(X,d)$ מרחב מטרי שלם.

(ג) (5 נקודות) תהי $X=[1,\infty)$. מטריקה $d$ מוגדרת בסעיף (א). האם $(X,d)$ מרחב מטרי שלם ?

רמז: בסעיפים (ב),(ג) אפשר להיעזר בעובדה כי קבוצה $Y\subset R$ עם מטריקה אוקלידית רגילה זה מרחב מטרי שלם אם ורק אם קבוצה $Y$ סגורה ב- $R$ (עם מטריקה אוקלידית).

## שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $X\subset R^n$ קבוצה כלשהי במרחב אוקלידי עם מטריקה רגילה.
נניח כי $X$ מקיימת את התכונה הבאה: אם $f(x):X\to R$ פונקציה רציפה אז קבוצת ערכים שלה $f(X)=\{f(x):x\in X\}$ חסומה ב- $R$. הוכיחו כי $X$ קבוצה קומפקטית.

## שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $E\subset[a,b]$ קבוצה מדידה לפי לבג . נניח שלכל קטע פתוח $\Delta$ מתקיים כי $\mu(E\cap\Delta)\le\frac{1}{2}\mu(\Delta)$. הוכיחו כי $\mu(E)=0$.

## שאלה 4

(א) (10 נקודות) נניח כי לכל $n$ טבעי מוגדרת פונקציה מדידה לפי לבג $f_n(x):[0,1]\to[0,1]$ כך שאינטגרל לפי לבג מקיים $\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu=1$. האם יכול להיות כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ לכל $x\in[0,1]$ ?

(ב) (15 נקודות) נניח כי לכל $n$ טבעי מוגדרת פונקציה מדידה לפי לבג $f_n(x):[0,\infty)\to[0,1]$ כך שאינטגרל לפי לבג מקיים $\int_{[0,\infty)} f_n(x)\,d\mu=1$. האם יכול להיות כי $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=0$ לכל $x\in[0,\infty)$ ?

**בהצלחה!**

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון יסודות האנליזה להנדסת חשמל1 , תאריך 06.02.2019, מועד א'
מספר הקורס: 201-2-5331
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

**חומר עזר**

## שאלה 1

אפשר להשתמש חופשי בעובדה כי מרחב $R$ עם מטריקה רגילה זו מרחב מטרי שלם.
לא צריך להוכיח עובדה זאת.

## שאלה 2

אפשר להשתמש בעובדה כי במרחב אוקלידי $R^n$ עם מטריקה רגילה $d$ מוגדרת פונקציה $f(x)=d(x,0)=\|x\|$ ופונקציה זאת רציפה. לא צריך להוכיח עובדה זאת.

## שאלה 3

איך לחשב מידה של קבוצה מדידה על ידי מידה של קטעים פתוחים?

## שאלה 4

באיזו תנאים $\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x)$ ב $E$ גורר כי $\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E f(x)\,dx$ ?

# פתרון של מבחן בקורס

## טופולוגיה ואנליזה להנדסת חשמל 1, מועד א', 2019

**שאלה 1** נסמן על ידי $Y$ קבוצה של מספרים ממשיים

(א)
$$Y=\left\{\frac{1}{x} : x\in X\right\}$$

בקבוצה $Y$ מוגדרת מטריקה סטנדרטית אוקלידית $d_R$

$d_R(y_1,y_2)=|y_1-y_2|$ לכל $y_1,y_2\in Y$

ומכאן העתקה $\varphi:(Y,d_R)\longrightarrow(X,d)$, $\varphi(y)=\frac{1}{y}$

זו העתקה חד-חד ערכית ועל ושומרת על המרחקים: $d(\varphi(y_1),\varphi(y_2))=d_R(y_1,y_2)$

לכן $d$ מקיימת את כל האקסיומות של מטריקה בקבוצה $X$ מפני ש-$d_R$ זו מטריקה סטנדרטית בקבוצה $Y$.

(ב) אם $X=(0,1]$ אז $Y=\left\{\frac{1}{x}: x\in(0,1]\right\}=[1,\infty)$

קבוצה $[1,\infty)\subset(\mathbb{R},d_R)$ סגורה, לכן $([1,\infty),d_R)$ זו מרחב מטרי שלם כי $(\mathbb{R},d_R)$ זו מרחב מטרי שלם ולכן גם $(X,d)$ זו מרחב מטרי שלם

(ג) אם $X=[1,\infty)$ אז $Y=(0,1]$

$Y\subset(\mathbb{R},d_R)$ קבוצה לא סגורה, לכן $(Y,d_R)$ זו מרחב מטרי לא שלם, ולכן גם $(X,d)$ לא מרחב מטרי שלם.

נבחר סדרה של מספרים כמו: נקח סדרה $\{x_n=n\}_{n=1}^{\infty}$

אז $d(x_n,x_m)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|$ ולכן $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ זו סדרת קושי,

אבל $\lim_{n\to\infty}x_n$ ב-$(X,d)$ לא קיים, כי

$\lim_{n\to\infty}x_n=0$ ב-$R$ אבל $0\notin Y$.

## שאלה 2

נניח בשלילה שלא כך: $X \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה לא קומפקטית

אז $X$ או לא חסומה, או לא סגורה.

אם $X$ לא חסומה אז נתבונן בפונקציה רציפה

$$f: X \to \mathbb{R}$$

שמוגדרת כך: $f(x) = d(x,0) = \|x\|$

אז לכל קבוע $c>0$ יש $x \in X$ כך ש: $f(x) > c$, זאת אומרת, קבוצה $f(X)$ לא חסומה ב $\mathbb{R}$.

אם $X$ קבוצה לא סגורה אז יש סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ כך ש: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \notin X$. נתבונן בפונקציה רציפה

$$f(x) = \frac{1}{d(x,x_0)} : X \to \mathbb{R}$$

$f(x)$ רציפה כי $d(x,x_0)$ פונקציה רציפה, ו $0 \neq d(x,x_0)$.

ומ $f(x_n) = \frac{1}{d(x_n,x_0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, כלומר $f(x)$ לא חסומה בניגוד לנתוני השאלה. ולכן, אם $X$ קבוצה לא קומפקטית אז קיימת פונקציה רציפה $f: X \to \mathbb{R}$ כך ש: $f(X) \subset \mathbb{R}$ לא חסומה. סתירה.

## שאלה 3

$$\mu(E) = \inf\{\mu(U) : E \subset U,\ U \subset \mathbb{R} \text{ קבוצה פתוחה}\}$$

כל קבוצה פתוחה $U \subset \mathbb{R}$ אפשר להציג כ:

$$U = \biguplus_n \Delta_n$$

כאשר כל $\Delta_n$ קטע פתוח, והאיחוד הוא בן-מניה או סופי.

אם $E \subset U$ אז:

$$\mu(E) = \sum_n \mu(E \cap \Delta_n) \underset{\text{על פי הנתון}}{\le} \sum_n \frac{1}{2}\mu(\Delta_n) = \frac{1}{2}\mu(U)$$

ומכאן, לכל קבוצה פתוחה $E \subset U$ מתקיים כי

$$\mu(E) \le \frac{1}{2}\mu(U)$$

לכן

$$\mu(E) \le \frac{1}{2} \inf_{E \subset U} \{\mu(U)\} = \frac{1}{2}\mu(E)$$

לכן מקבלים $0 \le \mu(E) \le \frac{1}{2}\mu(E)$

$$\Downarrow$$

$$\mu(E) = 0$$

## שאלה 4

(א) לא כי אם נפעיל את "התכנסות נשלטת"

אם $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ לכל $x \in [0,1]$ ו- $|f_n(x)| \le 1$ לכל $x$

אזי $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = \int_{[0,1]} 0\,d\mu = 0$. לכן

לא יכול להיות כי $\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = 1$ לכל $n$

(ב) כן יכול להיות. דוגמה:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & n-1 \le x < n \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

אזי $\int_{[0,1]} f_n(x)\,d\mu = 1$ לכל $n$.

ולכל $x \in [0,\infty)$ יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $x < n_0$

ואז $f_n(x) = 0$ לכל $n > n_0$, לכן

$$\forall x \in [0,\infty) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$