בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 26.11.2015
מספר הקורס: 201.1.0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבוחן: 2 שעות. חומר עזר: אין.
- <u>יש לענות על כל 3 שאלות. משקל של כל שאלה 35 נקודות.</u>
- <u>יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!</u>
- <u>בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל חמישית מהנקודות. הציון הסופי של כל שאלה יעוגל כלפי מעלה.</u>
- <u>שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.</u>

מספר הנבחן ________________

<u>שאלה 1</u> (35 נקודות)

מצא את כל הפונקציות $f(x)$ שמוגדרות ורציפות לכל x בקטע $[0,1]$ ומקיימות את התכונות הבאות:

(1) $f(x)\ge 0$ לכל $x\in[0,1]$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\left(\frac{2f(x)}{1+f^2(x)}\right)^n dx=1$.

<u>שאלה 2</u> (35 נקודות)

(1) חשב את האינטגרלים מסוימים הבאים

(א) (10 נקודות) $\int_0^1\frac{1}{e^{3x}+1}dx$; (ב) (10 נקודות) $\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{x}{1+\cos x}dx$

(2) (15 נקודות) מצא נפח גוף שמתקבל על ידי סיבוב של חצי אליפסה $\{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1 : a>0, b>0, y\ge 0\}$

סביב ציר x.

<u>שאלה 3</u> (35 נקודות)

נניח כי $f(x),g(x)$ שתי פונקציות רציפות על כל ישר. הוכח או הפריך את הטענות הבאות:

(א) (20 נקודות) אם $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx; \int_{-\infty}^{\infty}g(x)dx$ מתכנסים אזי גם $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)dx$ מתכנס.

(ב) (15 נקודות) אם $\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)dx; \int_{-\infty}^{\infty}g^2(x)dx$ מתכנסים אזי גם $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)dx$ מתכנס.

בהצלחה!

פתרונות של מבחן באינפי 2, 26.11.15

שאלה 1: לכל a ממשי מתקיים: $\frac{2a}{1+a^2} \le 1 \iff 2a \le 1+a^2$

ושוויון מתקיים אם ורק אם $a=1$. בהתאם, אם $f(x)=1$

לכל x אזי $\frac{2f(x)}{1+f^2(x)}=1$ לכל x ולכן

נוכיח כי $\int_0^1 \left(\frac{2f(x)}{1+f^2(x)}\right)^n dx=1$ לכל n.

אז $f(x)=1$ היא הפונקציה היחידה שמקיימת את כל התנאים.

נניח בשלילה כי $f(x_0)\neq 1$, $x_0\in[0,1]$. על פי רציפות של $f(x)$ אפשר להניח כי

אזי $x_0\in(0,1)$.

$g(x)=\frac{2f(x)}{1+f^2(x)}$ פונקציה רציפה בקטע $[0,1]$,

$0\le g(x)\le 1$ לכל $x\in[0,1]$ ויש נקודה $x_0\in(0,1)$ כך ש $g(x_0)<1$.

נקבע מספר c כך ש $g(x_0)<c<1$.

על פי רציפות של פונקציה $g(x)$ בנקודה x_0

קיים $\delta>0$ כך ש

$g(x)<c$ לכל $x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]$.

לכן $[g(x)]^n<c^n$ לכל x כזה ולכן

$$\int_0^1[g(x)]^n dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}[g(x)]^n dx + \int_{[0,1]\setminus[x_0-\delta,x_0+\delta]}[g(x)]^n dx \le$$

$$\le 2\delta\cdot c^n+(1-2\delta)$$

$\lim_{n\to\infty} c^n=0$ ולכן

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1[g(x)]^n dx \le 1-2\delta<1$$

הגענו לסתירה. סוף ההוכחה. לכן $f(x)\equiv 1$.

שאלה 2

(א)

$$\int_0^1 = \int_0^1 \frac{e^{3x}}{e^{3x}(e^{3x}+1)}\,dx = \left\{ \begin{array}{c} \text{הצבה} \\ e^{3x}=t \end{array} \right\}$$

$$3e^{3x}dx = dt$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^{e^3} \frac{dt}{t(t+1)} = \frac{1}{3}\int_1^{e^3}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\ln t - \ln(t+1)\right)\Big|_1^{e^3} = \frac{1}{3}\left(3-\left(\ln\left(\frac{e^3+1}{2}\right)\right)\right)$$

(ב)

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}-1 \Longrightarrow 1+\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2}$$

$$\frac{1}{1+\cos x} = \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \left(tg\,\frac{x}{2}\right)'$$

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi} x\,\frac{dx}{1+\cos x} = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} x\,d\left(tg\,\frac{x}{2}\right) = \left\{\text{בחלקים}\right\} =$$

$$= x\cdot tg\,\frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi} - \int_0^{\frac{2}{3}\pi} tg\,\frac{x}{2}\,dx =$$

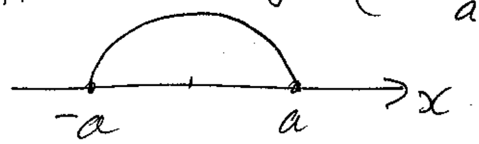
$$= \frac{2}{3}\pi\cdot tg\,\frac{\pi}{3} - \int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\cdot tg\,\frac{\pi}{3} + 2\ln\left(\cos\frac{x}{2}\right)\Big|_0^{\frac{2}{3}\pi} =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\cdot tg\,\frac{\pi}{3} + 2\left(\ln\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) - \ln(\cos 0)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi\cdot\sqrt{3} - 2\ln 2$$

שאלה 2 (ב) $y^2=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2$ חצי אליפסה



$$V=\pi\int_{-a}^{a} y^2(x)\,dx=\pi\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)b^2\,dx=$$

$$=\pi b^2\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a}=\pi b^2\left(2a-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi b^2 a$$

שאלה 3 (א) לא נכון. ניקח פונקציות הממשיות
רציפות לכל x $\quad f(x)=g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}$
אך $f(0)=g(0)=0$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{|x|}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{\sin x}{\sqrt{-x}}dx$$

אינטגרלים מתכנסים על פי משפט דיריכלה.

אולם

$$\int_{0}^{\infty}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\int_{0}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx$$

משתמש ב $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2x}$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x}dx=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx}_{\text{מתבדר}}-\underbrace{\frac{1}{2}\int_{1}^{\infty}\frac{\cos 2x}{x}dx}_{\text{מתכנס על פי משפט דיריכלה}}$$

(ב) נכון. $|f(x)g(x)|\le\frac{1}{2}\left(f^2(x)+g^2(x)\right)$. לכן
אינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)g(x)\,dx$ מתכנס בהחלט
על פי משפט השוואה.