אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:_____________

תאריך הבחינה : 25.07.2005
שם המורה : גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב : חדו"א א2
מס' הקורס : 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה : א' , סמ' : ב', מועד : ב'
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר : דף נוסחאות אחד (בגודל סטנדרטי)

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.
כל התשובות חייבות יבדקו על-ידי הבודק.
ניקוד הסופי יתבצע לפי 5 תשובות הטבות ביותר.

1. תהי $f(x)=\int_0^x e^{\sin t}dt$. הוכח שהאינטגרל הלא-אמיתי $\int_1^\infty \frac{\sin x}{f(x)}dx$ מתכנס.

2. יהי $S(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n+n}$

1) הוכח שהפונקציה $S(x)$ מוגדרת לכל $x>1$.
2) הוכח שהפונקציה $S(x)$ רציפה לכל $x>1$.
3) הראה שהטור לא מתכנס במידה שווה בתחום $X=(1,\infty)$.

3. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[a,b]$ המקיימת את התנאי: לכל $g(x)$ אל $[a,b]$ כך ש- $g(a)=g(b)=0$ האינטגרל $\int_a^b f(x)g(x)dx$ שווה ל-0.הראה ש- $f(x)=0$ לכל $a\le x\le b$.

4. הראה ש - l של העקומה הסגורה (אליפסה) $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$, $a,b\neq 0$ מקיים את האי-שיוון

$$2\pi\min\{|a|,|b|\}\le l\le 2\pi\max\{|a|,|b|\}$$

5. . תהי
$$f(x,y)=\begin{cases} x(\sin y)\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

חשב את ה נגזרות $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ ו $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ ב- $(0,0)$

6. נתונה הפונקציה $f(x,y)=|x-y|+x^2$.

(א) מצא את נקודות האקסטרמום המקומי של פונקציה $f(x,y)$.
(ב) מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר בריבוע: $\{(x,y):-1\le x\le 1,\quad -1\le y\le 1\}$.

-בהצלחה-

פתרונון של המבחן מועד ב' 2005

שאלה 1

$f(x)$ מונוטונית , עולה בתחום $(0,\infty)$ כי $f'(x)=e^{\sin x}>0$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ כי $e^{\sin t}>e^{-1}$ לכל t לכן

$\int_0^x e^{\sin t}dt>\int_0^x e^{-1}dt=\frac{x}{e}\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty$ לכל x .

לכן $\frac{1}{f(x)}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ יורדת מונוטונית ואז אינטגרל $\int_1^\infty \frac{\sin x}{f(x)}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה.

שאלה 2

א. נקבע נקודה $x>1$ שרירותית.

לכל $x>1$ קבוע $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{x^n+n}=1$, לכן טורים חיובים $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n+n}$ ו $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n}$ שקולים.

טור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n}$ מתכנס כטור הנדסי עם $0<q=\frac{1}{x}<1$, לכן לפי מבחן השוואה גם טור

$S(x)=\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n+n}$ מתכנס.

ב. באופן דומה לשאלה 7 ניקח את נקודה $x_0>1$ שרירותית ונקבע $1<a<x_0$.

נראה שטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n+n}$ מתכנס במידה שווה בתחום $[a,\infty)$.

$\frac{1}{x^n+n}<\frac{1}{a^n}$ לכל $x\ge a$, טור מספרי $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{a^n}$ מתכנס כטור הנדסי ולכן לפי משפט Weierstrass

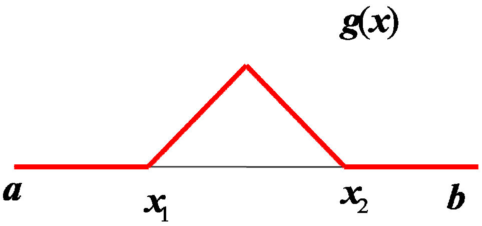
טור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n+n}$ מתכנס במידה שווה בתחום $[a,\infty)$.

לכן סכום $S(x)$ הוא פונקציה רציפה בתחום $[a,\infty)$ לפי המשפט ולכן בפרט $S(x)$ היא פונקציה רציפה בנקודה $x_0\in[a,\infty)$.

ג. אם נניח בדרך השלילה שטור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^n+n}$ כן מתכנס במידה שווה בתחום $X=(1,\infty)$ אזי לפי העובדה משאלה 5 טור יתכנס גם בקצה $x=1$, אבל עבור $x=1$ מקבלים טור $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{1+n}$ אשר מתבדר.

שאלה 3

נניח בשלילה ש- $f(x)$ שונה מ-0 באיזושהי נקודה. אז לפי הרציפות $f(x)$ קיים $\varepsilon > 0$ וקיים קטע
$(x_1, x_2) \subset (a,b)$ כך ש $|f(x)| > \varepsilon$ לכל $x \in (x_1, x_2)$. נניח למשל ש- $f(x) > \varepsilon$ לכל $x \in (x_1, x_2)$.
אז נבנה $g(x)$ כך:



$g(x)$ רציפה, $0 = g(x_2) = g(x_1) = g(a) = g(b)$, $g\left(\frac{x^1 + x^2}{2}\right) = 1$

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x)g(x)dx \ge \varepsilon, \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx > 0$$ סתירה

שאלה 4

נגדיר את האליפסה בצורה פרמטרית

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases} t \in [0, 2\pi]$$

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt$$

$\min\{|a|,|b|\} \le \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \le \max\{|a|,|b|\}$ לכן $2\pi \min\{|a|,|b|\} \le l \le 2\pi \max\{|a|,|b|\}$

שאלה 5

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,\Delta y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,\Delta y)}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}\sin\Delta y\,\frac{\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}=-\sin\Delta y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{-\sin\Delta y}{\Delta y}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\Delta x,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(\Delta x,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\Delta x\,\frac{\sin\Delta y}{\Delta y}\,\frac{\Delta x^2-\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}=\Delta x$$

$$\frac{\sin\Delta y}{\Delta y}\to 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

מסקנה: $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

שאלה 6

א. בתחום שבו $x\neq y$ מתקיים ש- $\frac{\partial f}{\partial y}=\pm 1\neq 0$, לכן לפונקציה $f(x,y)$ אין נקודות סטציונריות.
הסיכוי היחיד לנקודת אקסטרמום הוא $x=y$ ואז: $f(x)=x^2$ בעלת אקסטרמום בנקודה $x=0$.
כמובן $f(x,y)\geq 0$, לכן $(x,y)=(0,0)$ היא נקודת מינימום של הפונקציה $f(x,y)=|x-y|+x^2$.

ב. $f(0,0)=0$. נחקור על השפה של הריבוע.

$$x=\pm 1,\quad y\in[-1,1]\Rightarrow f=|\pm 1-y|+1\quad \min f=1,\quad \max f=3$$

$$y=1,\quad x\in[-1,1]\Rightarrow |x-1|=1-x\quad f=1-x+x^2,\quad x\in[-1,1]\Rightarrow\quad \min f=\frac{3}{4},\quad \max f=3$$

$$y=-1,\quad x\in[-1,1]\Rightarrow |x+1|=x+1\quad f=1+x+x^2,\quad x\in[-1,1]\Rightarrow\quad \min f=\frac{3}{4},\quad \max f=3$$

התשובה: $\min f=0,\max f=3$ בתחום G.