# אוניברסיטת בן גוריון בנגב

## מדור בחינות

תאריך הבחינה : 13.08.2007
שם המורה : גולדשטיין, גורביץ', ליידרמן
מבחן ב : חדו"א א2
מס' הקורס : 201-1-0021
מיועד לתלמידי : מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה : א' , סמ' : ב', מועד :ב'
משך הבחינה : 3 שעות
חומר עזר : דף נוסחאות אחד (2 עמודים) בגודל סטנדרטי, מחשב כיס פשוט עם צג קטן

**מס' הנבחן:___________**

ענו על 5 השאלות מתוך 6.
כל שאלה שווה 20 נקודות.

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.

**השאלות:**

**1.** תהי פונקציה $f(x)$ מוגדרת ורציפה לכל $x \in R$. הוכח שאם מתקיים $\int_{a}^{2a} f(x)\,dx = \int_{-2a}^{-a} f(x)\,dx$ לכל $a > 0$

אז $f(x)$ פונקציה זוגית, כלומר $f(x) = f(-x)$ לכל $x \in R$.

**2.** נניח שפונקציה $\varphi(\alpha)$ רציפה לכל $\alpha$ ועקומה $C = \{(x(t), y(t)) : 0 \le t \le 1\}$ מוגדרת על ידי הצגה פרמטרית הבאה:

$\{x(t) = \int_0^{t^2} \sin(\varphi(\alpha))\,d\alpha,\quad y(t) = \int_0^{t^2} \cos(\varphi(\alpha))\,d\alpha\}$. חשב את האורך של העקומה $C$.

**3.** חקור את התכנסות הטור המספרי $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ בשני מקרים הבאים: א) $u_n = (\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx)^{-1}$ ; ב) $u_n = \int_0^n e^{-x^2}\,dx$.

**4.** נתון טור החזקות $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(1/n)}{[\ln(n)]^2} x^n$

א) חשב את רדיוס ההתכנסות של הטור.
ב) חקור את ההתכנסות בקצוות.

**5.** חקור האם הפונקציה $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & ,(x,y) \ne (0,0) \\ 1 & ,\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ ?

**6.** נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2$.

א) מצא את כל הנקודות של אקסטרמום מקומי של פונקציה $f(x,y)$.
ב) מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של פונקציה $f(x,y)$ בעגול $\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\}$.

**-בהצלחה-**

## פתרונות של מבחן בחדו"א א2 , מועד ב' 2007

### שאלה 1.

נקבע $x>0$ כלשהו.

לפי הנתון מתקיימים השוויונות:

$$1)\quad \int_{x/2}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{-x/2} f(t)dt$$

$$2)\quad \int_{x/4}^{x/2} f(t)dt=\int_{-x/2}^{-x/4} f(t)dt$$

$$3)\quad \int_{x/8}^{x/4} f(t)dt=\int_{-x/4}^{-x/8} f(t)dt$$

$$\vdots$$

$$n)\quad \int_{x/2^{n}}^{x/2^{n-1}} f(t)dt=\int_{-x/2^{n-1}}^{-x/2^{n}} f(t)dt$$

ניקח סכום של כל $n$ השוויונות ואז נקבל כי לכל $x>0$ ולכל $n=1,2,...,$ מתקיים ש-

$$\int_{x/2^n}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{-x/2^n} f(t)dt$$

נעבור בשוויון הזה לגבול לפי $n\to\infty$ . אזי על סמך $\lim\limits_{n\to\infty} x/2^n=0$ נקבל את המסקנה הבאה:

$$\int_{0}^{x} f(t)dt=\int_{-x}^{0} f(t)dt \quad \text{לכל } x>0 \qquad (*)$$

עכשיו ניקח נגזרות משני הצדדים של שוויון (*).

$f(t)$ פונקציה רציפה, לכן לפי המשפט היסודי של חדו"א הנגזרות של האינטגרלים הן:

$$f(x)=-f(-x)(-x)'=f(-x)$$

כלומר $f(x)=f(-x)$ לכל $x$.

### שאלה 2.

הנוסחה הכללית של אורך העקומה היא $l=\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,dt$ .

לפי המשפט היסודי של חדו"א $x'(t)=\sin(\varphi(t^2))\,2t,\quad y'(t)=\cos(\varphi(t^2))\,2t$

$$[x'(t)]^2+[y'(t)]^2=4t^2$$

$$l=\int_0^1 2t\,dt=1$$

### שאלה 3.

א) נוכיח קודם ש- $n\to\infty$ , $\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx\sim\dfrac{n^2}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4}\,dx}{n^2/2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{comment\ \#\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{1+n^4}}{n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[4]{\frac{1}{n^4}+1}=1$$

{#} נתייחס ל- $n$ כמשתנה רציף ואז נשתמש בכלל לופיטל.

לכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\sim 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ וטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה.

ב) נשים לב ש- $\lim_{n\to\infty} u_n = \int_0^\infty e^{-x^2}dx \neq 0$ , לכן תנאי הכרחי להתכנסות לא מתקיים וטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתבדר.

**שאלה 4.**

א) $\sin x \sim x, x \to 0$ , לכן $\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, n\to\infty$ .

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n\ln^2 n} : \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right) = 1$$

ב) בקצה $x = 1$ מקבלים טור מספרי חיובי $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ . הוא שקול לטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ .

נוכיח שטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ מתכנס לפי מבחן אינטגרלי. נגדיר פונקצית עזר $x \geq 2$ , $f(x) = \frac{1}{x\ln^2 x}$ .

אז פונקציה $f(x)$ מקיימת את כל התנאים של מבחן אינטגרלי: מונוטונית יורדת ל- 0 כאשר $x\to\infty$ .

$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2 x}dx = \int_2^\infty \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} < \infty$ , לכן גם טור מספרי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ מתכנס לפי מבחן אינטגרלי ולכן גם

טור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{\ln^2 n}$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה. בקצה $x = -1$ מקבלים טור $\sum_{n=2}^{\infty} a_n(-1)^n$ שמתכנס בהחלט.

**שאלה 5.**

נחשב נגזרות חלקיות.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\ln(1+\Delta x^2)}{\Delta x^2}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(1+\Delta x^2)-\Delta x^2}{\Delta x^3}$$

נסמן $t = \Delta x$ . לפי כלל לופיטל

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t^2)-t^2}{t^3} = \lim_{t\to 0}\frac{\frac{2t}{1+t^2}-2t}{3t^2} = \lim_{t\to 0}\frac{-2t}{3(1+t^2)} = 0$$

באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$ .

נרשום את תוספת השלמה $\Delta z = \frac{\ln(1+\Delta x^2+\Delta y^2)}{\Delta x^2+\Delta y^2} - 1 = 0\Delta x + 0\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

מפה $\varepsilon(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{\ln(1+\Delta x^2+\Delta y^2)}{\Delta x^2+\Delta y^2}-1\right) = \frac{\ln(1+\Delta x^2+\Delta y^2)-(\Delta x^2+\Delta y^2)}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}$ .

נסמן $t = \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ . כמו בחישוב קודם $\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\varepsilon(\Delta x,\Delta y) = \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t^2)-t^2}{t^3} = 0$

ז"א פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$ .

**שאלה 6.**

**(א)** $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy-6y = 0$ , $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2+3y^2-6x = 0$

$6xy-6y = 6(x-1)y = 0$ גורר **ש-** $x = 1$ או $y = 0$ . נציב למשוואה הראשונה.

אם $y = 0$ אז $x = 0$ או $x = 2$ , מקבלים עוד 2 נקודות סטציונריות $M_1 = (0,0), M_2 = (2,0)$

אם $x=1$ אז $y=\pm 1$, מקבלים 2 נקודות סטציונריות $M_3=(1,1), M_4=(1,-1)$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x-6\ ,\ C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6x-6\ ,\ B=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6y\ ,$$

$$\Delta=AC-B^2=(6x-6)^2-(6y)^2$$

בנקודות $M_{3,4}$ מתקיים ש- $\Delta<0$ ולכן $M_{1,2}$ הן נקודות אוכף.

בנקודות $M_{1,2}$ מתקיים ש- $\Delta>0$ ולכן $M_{1,2}$ הן נקודות קיצון:

$M_1(0,0)$ היא נקודת מקסימום מקומי, $M_2(2,0)$ היא נקודת מינימום מקומי.

**(ב)** בתוך התחום נמצאות נקודת קיצון $M_{1,2}$. $f(M_1)=0$ , $f(M_2)=-4$ .

אין טעם לקחת בחשבון נקודות אוכף.

נחקור במעגל $y=\pm\sqrt{4-x^2}, x\in[-2,2]$ .

$$g(x)=x^3+3x(4-x^2)-3x^2-3(4-x^2)=-2x^3+12x-12,\quad x\in[-2,2]\ .$$

$$g'(x)=-6x^2+12,\quad x\in[-2,2]\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

$$g(2)=-4, g(-2)=-20, g(\sqrt{2})=8\sqrt{2}-12\approx-0.7, g(\sqrt{2})=-8\sqrt{2}-12\approx-23.3$$

התשובה: ערך הכי גדול בתחום $f(0,0)=0$

ערך הכי קטן בתחום $f(\sqrt{2},\pm\sqrt{2})=-8\sqrt{2}-12\approx-23.3$