אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בוחן בחשבון אינפיניטסימלי 2 , תאריך 18.05.2014
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדיליידרמן

- משך הבחינה: 1.5 שעות
- יש לענות על כל 3 שאלות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ______________

שאלה 1

(30 נק') תהי פונקציה $f(x):[0,\infty)\to[0,\infty)$ רציפה. נגדיר פונקציה $F(x)=1+2\int_0^x f(t)dt$ ונניח ש- $f(x)\le xF(x)$ לכל $x\ge 0$. הוכח כי $f(x)\le xe^{x^2}$ לכל $x\ge 0$.

שאלה 2

חשב את האינטגרלים לא מסוימים הבאים

א. (10 נק') $\int \sin(\ln x)dx$ ב. (10 נק') $\int \frac{1}{e^x+1}dx$ ג. (10 נק') $\int \frac{8x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}dx$

שאלה 3 תהי עקומה Γ מוגדרת בצורה פרמטרית: $\Gamma=\{(x(t),y(t)):t\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]\}$,

כאשר $y(t)=\cos t$, $x(t)=\int_0^t \sqrt{1+2\sin\alpha}\,d\alpha$

א. (20 נק') מצא שטח של תחום מישורי שחסום על ידי עקומה Γ וציר x.
ב. (20 נק') מצא אורך של עקומה Γ.

בהצלחה!

פתרונות של מבחן באינפי 2, 18.05.2014

<u>שאלה 1</u> דומה לשאלה 1 ממבחן 27.07.2012

עפ"י המשפט היסודי של חדו"א $F'(x)=2f(x)$

לכל $x\in[0,\infty)$. לכן $\frac{1}{2}F'(x)\le xF(x)$.

כי $F(x)\ge 1>0$ לכל $x\in[0,\infty)$, לכן

$$\frac{F'(x)}{F(x)}\le 2x \qquad \forall x\in[0,\infty)$$

לכן

$$\int_0^x \frac{F'(t)}{F(t)}dt \le \int_0^x 2t\,dt$$

כלומר

$$\forall x\in[0,\infty) \qquad \ln(F(t))\Big|_0^x \le x^2$$

$$\ln(F(x))-\underbrace{\ln(F(0))}_{=0=\ln 1}\le x^2$$

$$\forall x\in[0,\infty) \qquad F(x)\le e^{x^2}$$

נתון: $f(x)\le xF(x)$, לכן $f(x)\le xe^{x^2}$ לכל $x\ge 0$.

<u>שאלה 2</u>

(א)

$$\int \sin(\ln x)\,dx=\left\{\begin{matrix}\ln x=t\\ x=e^t\\ dx=e^t dt\end{matrix}\right\}=\int \sin t\, e^t dt$$

$$I=\int \sin t\, e^t dt=\sin t\cdot e^t-\int \cos t\, e^t dt=$$

$$=\sin t\cdot e^t-\left(\cos t\cdot e^t+\int \sin t\, e^t dt\right)$$

$$2I=(\sin t-\cos t)e^t \Rightarrow I=\frac{x}{2}\left(\sin(\ln x)-\cos(\ln x)\right)+C$$

(ב)

$$\int \frac{1}{e^x+1}dx=\left\{\begin{matrix}e^x=t\\ x=\ln t\\ dx=\frac{dt}{t}\end{matrix}\right\}=\int\frac{1}{(t+1)t}dt=$$

$$\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C= x-\ln(e^x+1)+C$$

$$\frac{8x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+5)} = \frac{8x+1}{(x^2-4x+4)(x^2+4x+5)} = \qquad (ζ)$$

$$= \frac{1}{x^2-4x+4} - \frac{1}{x^2+4x+5}$$

$$\int \frac{8x+1}{(x-2)^2(x^2+4x+5)}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arctg}(x+2) + C$$

(κ) <u>3, ηδκε</u>

$$S = \int_a^b y(x)\,dx = \{x = x(t)\} = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} y(t)\,x'(t)\,dt =$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos t \sqrt{1+2\sin t}\,dt = \{\sin t = u\} = \int_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1+2u}\,du =$$

$$= \frac{1}{3}(1+2u)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{1}{3}2^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt = \qquad (ν)$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{1+2\sin t + \sin^2 t}\,dt = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \sqrt{(1+\sin t)^2}\,dt =$$

$$= \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1+\sin t)\,dt = t - \cos t\Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{\pi}{3}$$