אוניברסיטת בן-גוריון בנגב | הפקולטה למדעי הטבע
Ben-Gurion University of the Negev | המחלקה למתמטיקה

בחינה בחדו"א 2 למדמ"ח והנדבת תוכנה, תאריך 10.01.2022, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-2371, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על כל 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 20 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר **פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף (פרט לסעיף הבונוס) ניתן לכתוב **"לא יודע\ת"** ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע\ת" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________________

שאלה 1. (א) (10 נקודות) חשבו את הערך של אינטגרל הבא: $\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1}$.

(ב) (10 נקודות) חשבו את נפח גוף שמתקבל על ידי סיבוב של גרף של הפונקציה $f(x)=x\sqrt{\operatorname{arctg} x}$ כאשר $x\in[0,1]$, סביב ציר ה- x.

שאלה 2. (20 נקודות) נתון כי פונקציה $f(x)$ רציפה ואינטגרל הלא אמתי $\int_0^\infty f(x)\,dx$ מתכנס.

הוכיחו כי קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ כך ש- $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ ו- $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=0$

שאלה 3. (20 נקודות) פונקציה $f(x,y)$ מוגדרת על ידי הנוסחה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(2x^2+3y^2)^\alpha}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

מצאו את כל הערכים של $\alpha>0$ כך שפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

שאלה 4. (א) (10 נקודות) מצאו את נקודות קיצון מקומי של הפונקציה
$f(x,y)=x^3-6y^2-15x+3xy^2-4$ במישור.

(ב) (10 נקודות) בעזרת שיטת כופלי לגרנז' מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה

$f(x,y)=x-2y$ בתנאי ש- $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

שאלה 5. (20 נקודות) חשבו את אינטגרל הכפול $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dxdy$,

כאשר התחום מישורי D מוגדר על ידי התנאים הבאים:

$D=\{(x,y)\in R^2 : x\le 2;\ 0\le y\le x;\ x^2+y^2\ge 1\}$.

בהצלחה!

10.01.2022

פתרון של מבחן במועד א׳, 10.01.2022

שאלה 1 (א)

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^x\,dx}{e^x(e^x+1)} = \int \frac{d(e^x)}{e^x(e^x+1)} \overset{\text{הצבה } e^x=t}{=}$$

$$= \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \ln\left|\frac{t}{t+1}\right| = \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| + C$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{e^x+1} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 1 = \ln 2$$

(ב)

$$V = \pi\int_0^1 \left(x\sqrt{\operatorname{arctg} x}\right)^2 dx = \pi\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{3}\int_0^1 \operatorname{arctg} x\; d(x^3) \overset{\text{בחלקים}}{=} \frac{\pi}{3}\left(\operatorname{arctg} x\cdot x^3\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}dx\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{4} - \int_0^1\left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)dx\right) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right)$$

שאלה 2

נסמן $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$

נתון כי קיים גבול סופי $\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty f(t)\,dt = C$

לכן בפרט $\lim_{n\to\infty} F(n) = C$ (כאשר $n\in\mathbb{N}$)

ולכן $\lim_{n\to\infty}\left(F(n+1)-F(n)\right)=0$.

$$F(n+1)-F(n) = \int_n^{n+1} f(t)\,dt = f(x_n)\cdot 1 = f(x_n)$$

עבור איזשהו $x_n\in[n,n+1]$,

על פי משפט ערך ממוצע אינטגרלי!

מקבלים כי $x_n\in[n,n+1]$, לכן $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\left(F(n+1)-F(n)\right) = 0$$

שאלה 3

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(2(\Delta x)^2\right)^{\alpha}}{(\Delta x)^3} < \infty \iff \alpha > \frac{3}{2}$$

$\alpha = \frac{3}{2}$ לא אב ש $\left((\Delta x)^2\right)^{3/2} = |\Delta x|^3$

ולא קיים $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|^3}{(\Delta x)^3}$.

עבור $\alpha > \frac{3}{2}$ מקבלים ש $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. באופן דומה

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. נבדוק דיפרנציאביליות.

$$\frac{(2x^2+3y^2)^{\alpha}}{x^2+y^2} = 0\cdot x + 0\cdot y + \varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$$

לכן

$$\varepsilon(x,y) = \frac{(2x^2+3y^2)^{\alpha}}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$|\varepsilon(x,y)| \le 3^{\alpha}\frac{(x^2+y^2)^{\alpha}}{(x^2+y^2)^{3/2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

סוף ד $\alpha > \frac{3}{2}$.

התשובה: $\alpha > \frac{3}{2}$.

שאלה 4

(א)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2-15+3y^2=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -12y+6xy=0 \Rightarrow 6y(x-2)=0 \end{cases}$$

אם $y=0$ אז $3x^2-15=0 \Leftarrow x=\pm\sqrt{5}$

אם $x=2$ אז $-3+3y^2=0 \Leftarrow y=\pm 1$

ויש 4 נקודות חשודות לאקסטרמום.

$(\pm\sqrt{5},0)$; $(2,\pm 1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x-12; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=6y$$

$$\Delta = \det\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x-12 \end{pmatrix} = 36[x(x-2)-y^2]$$

אם $x=2$ אז $\Delta=-36y^2<0$, לכן נקודות $(2,\pm 1)$ הן נק' אוכף.

אם $y=0$, אז $x=\pm\sqrt{5}$ $\Delta>0$.

במקרה $x=\sqrt{5}$, $A=6\sqrt{5}>0$, במקרה $x=-\sqrt{5}$, $A=-6\sqrt{5}<0$,

תשובה: $(\sqrt{5},0)$ נק' min מקומי

$(-\sqrt{5},0)$ נק' max מקומי.

(ב) פונקציית לגרנז'

$$L(x,y,\lambda)=x-2y+\lambda\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x}=1+\lambda\frac{2}{9}x=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}=-2+\lambda\cdot\frac{2}{4}y=0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{9}{2}\frac{1}{\lambda} \\ y=4\frac{1}{\lambda} \end{cases}, \quad \lambda\neq 0$$

לכן

$$\frac{\left(\frac{9}{2}\frac{1}{\lambda}\right)^2}{9}+\frac{\left(4\frac{1}{\lambda}\right)^2}{4}-1=0$$

$$\frac{9}{4}+4=\lambda^2 \Rightarrow \frac{25}{4}=\lambda^2 \Rightarrow \lambda=\pm\frac{5}{2}$$

אם $\lambda=+\frac{5}{2}$ אזי $x=-\frac{9}{5}$, $y=\frac{8}{5}$

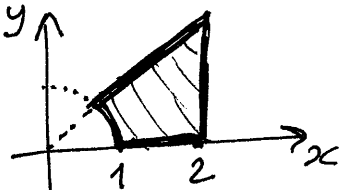
$f(-\frac{9}{5},\frac{8}{5})=-5$ ערך הקטן ביותר בתנאי

אם $\lambda=-\frac{5}{2}$ אזי $x=\frac{9}{5}$, $y=-\frac{8}{5}$

$f(\frac{9}{5},-\frac{8}{5})=5$ ערך הגדול ביותר בתנאי

הערה נוספת לא נדרש כי $f(x,y)$ רציפה ותנאי $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ מגדיר קבוצה קומפקטית. פונקציה רציפה בקבוצה קומפקטית מקבלת max ומקבלת מינ'.

<u>שאלה 5</u> תחום



נעבור למערכת פולרית. כל נקודה של תחום D מק"מ ?

$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}$; $1\le r\le\frac{2}{\cos\varphi}$

$$I=\iint_D\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dx\,dy=\int_0^{\pi/4}\left[\int_1^{2/\cos\varphi}\frac{1}{(r^2)^{3/2}}\,r\,dr\right]d\varphi$$

$$\int_1^{2/\cos\varphi}\frac{1}{r^2}\,dr=-\frac{1}{r}\Big|_1^{2/\cos\varphi}=1-\frac{\cos\varphi}{2}$$

$$I=\int_0^{\pi/4}\left(1-\frac{\cos\varphi}{2}\right)d\varphi=\varphi-\frac{\sin\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/4}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2\sqrt{2}}$$