אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
מדור בחינות

<u>תאריך הבחינה:</u> 15.7.2012
<u>מבחן ב:</u> חשבון אינפיניטיסמלי 2
<u>מסי קורס:</u> 201-1-0021
<u>שנה:</u> תשע"ב <u>סמסטר</u>: ב <u>מועד</u>: א
<u>שמות המרצים:</u> ארקדי ליידרמן ואור שליט
<u>משך הבחינה:</u> 3 שעות
<u>חומר עזר:</u> מחשבון פשוט ללא צג גרפי

<u>ענו על ארבע מתוך חמשת השאלות הבאות. נא לציין אילו שאלות אתם רוצים שנבדוק.</u>
הקפידו להסביר כל צעד במהלך הפתרון, ולציין את המשפטים והטענות עליהם אתם מסתמכים.
בכל סעיף/שאלה ניתן לכתוב "לא יודע/ת" ולקבל חמישית מהנקודות (מעוגלות מעלה לחצי הנקודה הקרובה). **סעיפים/שאלות בהם כתבתם "לא יודע/ת" לא ייבדקו.**

<u>בהצלחה!</u>

<u>שאלה 1</u> (25 נקי)
תהי $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. לכל n תהי f_n פונקציה לינארית למקוטעין על הקטע $[0,1]$ המוגדרת באופן הבא: $f_n\left(\frac{k}{n}\right)=f\left(\frac{k}{n}\right)$ עבור $k=0,1,2,\ldots,n$,
ו-f_n **לינארית** בכל קטע מהצורה $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$, $k=0,1,\ldots,n-1$.

א. (15 נקי) הוכיחו שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה ל- f בקטע $[0,1]$.
ב. (10 נקי) לכל n, נסמן ב- $I_n(f)$ את הקרוב ל- $\int_0^1 f(x)dx$ המתקבל על-ידי הפעלת כלל הטרפז עם n נקודות. השתמשו בסעיף א׳ כדי להוכיח ש- $I_n(f)\to\int_0^1 f(x)dx$ לכל f רציפה. במילים אחרות: הראו שכלל הטרפז עובד גם עבור פונקציות רציפות.

<u>שאלה 2</u> (25 נקי)
א. (10 נקי) תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ לא ריקה. לכל $x\in\mathbb{R}^n$ נגדיר
$$d(x,A)=\inf\{d(x,y)\colon y\in A\}$$
הוכיחו שהפונקציה $f(x)=d(x,A)$ רציפה על $\mathbb{R}^n$.
ב. (15 נקי) נסמן על-ידי B_n את הכדור הפתוח ב- $\mathbb{R}^n$ עם מרכז 0 ורדיוס $\frac{1}{n}$.
נגדיר סדרת פונקציות f_n על-ידי הנוסחא:
$$f_n(x)=d(x,B_n).$$
נגדיר $f(x)=\|x\|$. הוכיחו ש: $f_n\to f$ **במידה שווה על** $\mathbb{R}^n$.

<u>שאלה 3</u> (25 נק׳) שני הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!

א. (13 נק׳) מצאו את כל הפונקציות f המקיימות: f פונקציה רציפה על $[0,\infty)$, וקיים קבוע C כך שכל $x>0$ מתקיים

$$\int_x^{2x} f(t)dt = C.$$

ב. (12 נק׳) חשב את אורך העקום $\left\{\left(x,g(x)\right) \middle| 0\le x\le \frac{\pi}{2}\right\}$ כאשר g נתונה ע״י:

$$g(x)=\ln(\cos x+\sin x).$$

<u>שאלה 4</u> (25 נק׳)

נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=(x+y)^3-2x^2-12y$$

א. (13 נק׳) מצאו את כל הנקודות הקריטיות של f וקבעו אילו מהן נקודת מקסימום מקומי ואילו נקודת מינימום מקומי.

ב. (12 נק׳) מצאו את המקסימום והמינימום המוחלטים של f בתחום

$$D=\{(x,y):-4\le x+y, x\le 4, y\le 0\}.$$

<u>שאלה 5</u> (25 נק׳) ארבעת הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!

הוכיחו או הפריכו (באמצעות דוגמא נגדית) את הטענות הבאות:

א. (6 נק׳) אם $\{f_n\}$ סדרת פונקציות אנליטיות על $(-1,1)$, כך שהסדרה $\{f_n\}$ מתכנסת במידה שווה ל-f בקטע $(-1,1)$, אזי f אנליטית ב $(-1,1)$.

ב. (6 נק׳) נניח ש-f,g שתי פונקציות אשר הינן אינטגרביליות רימן על כל קטע מהצורה $[1,b]$, $b>1$. אם $\int_1^\infty f(x)dx$ וגם $\int_1^\infty g(x)^2dx$ מתכנסים אזי $\int_1^\infty g(x)f(x)dx$ מתכנס.

ג. (6 נק׳) נניח ש $f\in C^\infty(\mathbb{R})$. נניח בנוסף שרדיוס ההתכנסות R של טור החזקות $\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ מקיים $R>1$. אזי $f(1)=\sum_{n=0}^\infty \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

ד. (7 נק׳) יהיו p,q שני פולינומים כך ש $q(n)\ne 0$ לכל n טבעי, המקיימים בנוסף שמעלת q גדולה ממש ממעלת p. אזי הטור $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n\frac{p(n)}{q(n)}$ בהכרח מתכנס.

בהצלחה!

פתרון מועד א', אינפי 2, 2012

שאלה 1

א) יהי $\varepsilon>0$. f רציפה על קטע סגור ולכן רציפה במ"ש בקטע $[0,1]$ עלפי משפט קנטור. יהי $\delta>0$ המתאים ל- $\varepsilon/2$, כלומר

$$\circledast \quad \forall x,y\in[0,1]: |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon/2$$

יהי N כך ש- $\delta>\frac{1}{N}$.
נראה שלכל $n\geqslant N$ ולכל $x\in[0,1]$
$|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon$.

זה יראה התכנסות במ"ש.
יהי $n\geqslant N$ ו- $x\in[0,1]$. אז קיים K כ"ש:

$$x\in\left[\frac{K}{n},\frac{K+1}{n}\right]$$

אז:

$$f_n(x)=f\left(\tfrac{K}{n}\right)+\left[f\left(\tfrac{K+1}{n}\right)-f\left(\tfrac{K}{n}\right)\right]\left(x-\tfrac{K}{n}\right)\cdot n$$

כיון ש- $n\geqslant N$, $\delta>\frac{1}{n}$ ולכן

$$\left|\left[f\left(\tfrac{K+1}{n}\right)-f\left(\tfrac{K}{n}\right)\right]\left(x-\tfrac{K}{n}\right)\cdot n\right| \leq \varepsilon/2\cdot\left|x-\tfrac{K}{n}\right|n$$
$$\leq \varepsilon/2\cdot\tfrac{1}{n}\cdot n=\varepsilon/2$$

כמו כן $\left|x-\frac{K}{n}\right|\leq\frac{1}{n}<\delta$
ולכן מ- $\circledast$ נובע

$$\left|f(x)-f\left(\tfrac{K}{n}\right)\right|<\varepsilon/2$$

לפי כוס, נע ניב:

$$|f(x)-f_n(x)| = \left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)+\left[f\left(\tfrac{k+1}{n}\right)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right]\left(x-\tfrac{k}{n}\right)\cdot n\right|$$

$$\le \left|f(x)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right| + \left|\left[f\left(\tfrac{k+1}{n}\right)-f\left(\tfrac{k}{n}\right)\right]\left(x-\tfrac{k}{n}\right)\cdot n\right|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ב) נשים לב שמוגדרת כלל הרכבה:

$$I_n(f) = \int_a^b f_n(x)dx$$

לפי סעיף א, $f_n \longrightarrow f$ במ"ש בקטע $[0,1]$.

לפי משפט שהוכח בקורס

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

לכן

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f) = \int_a^b f(x)dx$$

שאלה 2 (א) נוכיח שפונקציה $f(x) = d(x, A)$

מקיימת את התכונה הבאה:

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le d(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$$

יהי $\varepsilon > 0$ כלשהו. אז קיים $y \in A$

כך ש: $f(x_1) \le d(x_1, y) < f(x_1) + \varepsilon$

על פי אי-שוויון המשולש:

$$d(x_2, y) \le d(x_2, x_1) + d(x_1, y)$$

לכן $d(x_2, y) \le f(x_1) + d(x_2, x_1) + \varepsilon$

אבל $f(x_2) \le d(x_2, y)$

ולכן $f(x_2) \le f(x_1) + d(x_2, x_1) + \varepsilon$

מאחר ש-ε נבחר שרירותי אז

$$\boxed{f(x_2) \le f(x_1) + d(x_2, x_1)} \quad (*)$$

אם נהפוך תפקידים של x_1, x_2 מנימוקים כמו לעיל אז באותו אופן נקבל את

אי-שוויון

$$\boxed{f(x_1) \le f(x_2) + d(x_1, x_2)} \quad (**)$$

מאי-שוויונות $(*)$, $(**)$ ועל סמך $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$

נובע מיד ש $|f(x_1) - f(x_2)| \le d(x_1, x_2)$

מסקנה הוכחנו אפילו את הטענה החזקה יותר:
פונקציה $f(x)$ רציפה במידה שווה על $\mathbb{R}^n$

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \delta=\varepsilon \quad \forall x_1,x_2\in\mathbb{R}^n$$
$$d(x_1,x_2)<\delta=\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|\le d(x_1,x_2)<\varepsilon$$

(ה) יהי $0\neq x\in\mathbb{R}^n$ כלשהו.
יהי $k\in\mathbb{N}$ כך ש $\frac{1}{k}<\|x\|$
נוכיח ש $f_k(x)=\|x\|-\frac{1}{k}$
לכל נקודה $y\in B_k$ על פי אי-שוויון המשולש מתקיים ש

$$d(x,0)-d(y,0)\le d(x,y)$$

לכן $\|x\|-\frac{1}{k}\le d(x,y)$

$$\|x\|-\frac{1}{k}=\inf_{y\in B_k} d(x,y)=f_k(x) \quad !$$

מצד שני
$$\forall x\in\mathbb{R}^n \quad f_k(x)\le d(x,0)=\|x\|$$

ומכן
$$\forall x\in\mathbb{R}^n \quad \|x\|-\frac{1}{k}\le f_k(x)\le \|x\|$$

ולכן
$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists k_0\in\mathbb{N} \quad \left(\frac{1}{k_0}<\varepsilon\right)$$
$$\forall k>k_0 \quad \forall x\in\mathbb{R}^n \quad |f_k(x)-f(x)|<$$
$$<\frac{1}{k}<\varepsilon$$

שאלה 3 (א) פונקציה f רציפה בתחום $[0,\infty)$,
לכן לפי המשפט היסודי של החדו"א

$$\forall x>0 \quad \left[\int_x^{2x} f(t)\,dt\right]' = 2f(2x)-f(x) = (C)' = 0$$

מכאן

$$\forall x>0 \quad f(2x)=\frac{1}{2}f(x)$$

כי מאינדוקציה מתמטית

$$\forall x>0 \quad f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}f\left(\frac{x}{4}\right)=\ldots=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)..$$

$$\frac{x}{2^n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

פונקציה $f(x)$ רציפה ב- 0, לכן

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right)=f(0)$$

$$\forall x>0 \quad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)=0\cdot f(0)=0$$

סוף
וכן $f(0)=0$ לפי רציפ'.

(ב)

$$l=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,dx=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1+\left(\frac{-\sin x+\cos x}{\cos x+\sin x}\right)^2}\,dx=$$

$$=\int_0^{\pi/2}\sqrt{\frac{2}{(\cos x+\sin x)^2}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{\cos x+\sin x}=$$

$\left\{t=tg\frac{x}{2} \text{ הצבה}\right\}$

$$=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt/(1+t^2)}{\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}}=\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{1-t^2+2t}=$$

$$=-\sqrt{2}\int_0^1\frac{dt}{(t-1)^2-2}=\{t-1=y\}=-\sqrt{2}\int_{-1}^0\frac{dy}{y^2-2}=$$

$$=+\sqrt{2}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{2}}{y+\sqrt{2}}\right|_{-1}^{0}=+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right|=$$

$$=\boxed{\ln(\sqrt{2}+1)}$$

<u>שאלה 4</u> (א)

$$f(x,y) = (x+y)^3 - 2x^2 - 12y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 3(x+y)^2 - 4x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 3(x+y)^2 - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (x+y)^2 = 4$$

$$x = \frac{3}{4}(x+y)^2 = 3$$

$$x+y = \pm 2$$

ישנן 2 נקודות חשודות לקיצון

$$P_1(x=3,\ y=-1) \ ; \quad P_2(x=3,\ y=-5)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(x+y) - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6(x+y)$$

בנקודה P_1 מקבלים

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\Delta < 0$$

P_1 — נקודה אוכף (לא קיצון)

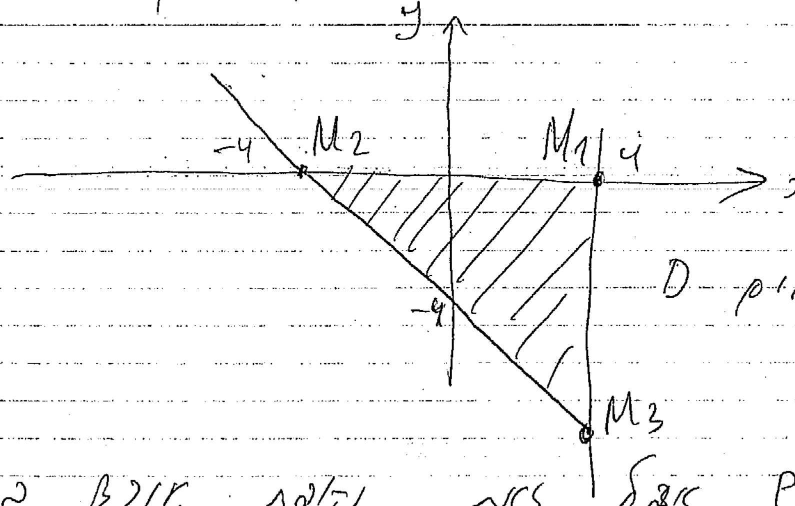
בנקודה P_2 מקבלים,

$$\begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A < 0 \ , \ \Delta > 0$$

P_2 — נקודה של מקסימום מקומי.

(ב)



תחום D

$P_1 \in D$ אבל כבר נקודה אוכף בכל אופן

$P_2 \in D$,

$$\boxed{f(3,-5) = 34}$$

נחקור על השפה של משולש.

1) קטע $[M_1, M_2]$ $\qquad x \in [-4, 4]$, $y = 0$

$$g_1(x) = x^3 - 2x^2$$

$$g_1'(x) = 3x^2 - 4x = 0$$

$$x = 0, \quad x = \frac{4}{3}$$

$$f(0,0) = 0 \qquad f\left(\tfrac{4}{3}, 0\right) = -\frac{32}{27}$$

מקצות

$$\boxed{g_1(-4) = -96} \qquad g_1(4) = 32$$

---

2) קטע $[M_1, M_3]$ $\qquad y \in [-8, 0]$, $x = 4$

$$g_2(y) = (4+y)^3 - 32 - 12y$$

$$g_2'(y) = 3(4+y)^2 - 12 = 0$$

$$(4+y)^2 = 4 \Rightarrow y = -2, \; y = -6$$

$$g_2(-2) = 0 \; ; \quad g_2(-6) = 32$$

מקצות

$$g_2(0) = 32 \; ; \quad g_2(-8) = 0$$

---

3) קטע $[M_2, M_3]$ $\qquad x + y = -4$

$$g_3(x) = (-4)^3 - 2x^2 - 12(-4 - x) =$$

$$= -64 - 2x^2 + 48 + 12x =$$

$$= -2x^2 + 12x - 16$$

$$g_3'(x) = -4x + 12 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$g_3(3) = 2$$

קיצוניים חשודים

$$\boxed{\begin{array}{l} f(-4,0) = -96 \\ f(3,-5) = 34 \end{array}}$$

תשובה: ערך הכי קטן, ערך הכי גדול בתחום D

ד)

פתרון מועד א', אינפי 2, 2012

שאלה 5

א) הטענה לא נכונה.

למשל, נתבונן בפונקציה $f(x)=|x|$.

לפי משפט הקירוב של וירשטראס יש סדרה $\{f_n\}$ של פולינומים כך ש- $f_n \to f$ במ"ש בקטע $[-1,1]$ (ובפרט בקטע $(-1,1)$).

כל פולינום הוא פונקציה אנליטית.

אבל f איננה אנליטית: f אפילו לא גזירה בנק' 0.

ב) הטענה לא נכונה. הנה דוגמא נגדית:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^{1/3}}$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{x^{2/3}}$$

$\int_1^b \sin x$ חסום, $\frac{1}{x^{1/3}} \searrow 0$

לכן $\int_1^\infty f(x)dx$ קיים לפי קריטריון דיריכלה.

$$g(x)^2 = \frac{\sin^2 x}{x^{4/3}} \le \frac{1}{x^{4/3}}$$

ו- $4/3 > 1$ ולכן $\int_1^\infty g(x)^2 dx$ קיים. (לפי קריטריון ההשוואה)

אבל $f(x)g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x}\right]$$

$\int_1^\infty \frac{\cos 2x}{x}dx$ קיים, $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ מתבדר ולכן

אינטגרל $\int_1^\infty f(x)g(x)dx$ מתבדר.

שאלה ד

ג) הטענה אינה נכונה.

נתבונן בפונקציה
$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

הוכח מקודם ש $f^{(n)}(0)=0$ לכל מספר n של נגזרת. לכן הטור
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$$
מתכנס לכל x ממשי, אבל
$$f(1)=\frac{1}{e}\neq 0=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

שאלה ז'

ט) הטענה כן נכונה.
נוכיח שטור מתכנס על פי מבחן לייבניץ.
נסמן. $k = \deg p(x) < \deg q(x) = m$

$$p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_k}{b_m} \frac{x^k + a_{k-1}/a_k\, x^{k-1} + \dots}{x^m + b_{m-1}/b_m\, x^{m-1} + \dots}$$

לכן בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח ש $a_k = b_m = 1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)/x^m}{q(x)/x^m} = 0$$

כעת נוכיח שפונקציה $\frac{p(x)}{q(x)}$ מונוטונית יורדת
החל מ x מסוים
נחשב נגזרת

$$\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' = \frac{p'(x)q(x) - p(x)q'(x)}{q^2(x)}$$

$$p'(x)q(x) - p(x)q'(x) = (k-m)x^{k+m-1} + \dots + \dots$$

זו פולינום ממעלה $k+m-1$. ומקדם הראש $k-m<0$.

לכן $\lim_{x\to\infty}\left(p'(x)q(x) - p(x)q'(x)\right) = -\infty$

ולכן $\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right)' < 0$ החל מ x מסוים.

ומכאן והסדרה $\left\{\frac{p(n)}{q(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית יורדת ל 0

והטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(n)}{q(n)}$ מתכנס.