אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev
הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 15.02.2013, מועד ב'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלה 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר **פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל חמישית מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________________

שאלה 1

(25 נק') תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$ ומקיימת את התנאי הבא:

לכל פונקציה רציפה ואי-זוגית $g(x)$ מתקיים $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = 0$.

הוכיחו כי פונקציה $f(x)$ בהכרח זוגית, כלומר $f(-x) = f(x)$ לכל $x \in [-1,1]$.

שאלה 2

(25 נק') תהי פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$ ומקיימת את התנאי $f(-1) = f(1) = 0$.

נגדיר $f_n(x) = x^n f(x)$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי סדרה של פונקציות $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-1,1]$.

שאלה 3

(25 נק') נתון טור חזקות הבא $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)x^{2n}$.

(א) (10 נק') מצאו את רדיוס ההתכנסות של טור.

(ב) (15 נק') חקרו את ההתכנסות בקצוות.

שאלה 4

(25 נק') תהי $D \subset R^n$ קבוצה קומפקטית ותהי $f : D \to R$ פונקציה רציפה.

נגדיר תת-קבוצה של R^{n+1} באופן הבא

$$G_f = \{(x_1, x_2, ..., x_n, z) \in R^{n+1} : (x_1, x_2, ..., x_n) \in D; -|f(x_1, x_2, ..., x_n)| \le z \le |f(x_1, x_2, ..., x_n)|\}$$

הוכיחו כי קבוצה G_f קומפקטית.

שאלה 5 (25 נקודות) **4 הסעיפים בשאלה זו אינם קשורים אחד לשני!**

הוכיחו או הפריכו (באמצעות דוגמה נגדית) את הטענות הבאות:

א. (6 נק') נתון כי פונקציה $f(x)$ רציפה ו- $\int_1^x |f(x)|\,dx \le 2013$ לכל $1 < x$.

אז אינטגרל לא אמתי $\int_1^\infty f(x^\alpha)\,dx$ מתכנס לכל $1 < \alpha$.

ב. (6 נק') אם $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) = C < \infty$ אז פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ו- $\int_0^1 f(x)\,dx = C$.

ג. (6 נק') אם טור $\sum_{n=0}^\infty p_n(x) = f(x)$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-1,1]$,

כאשר כל $p_n(x)$ הוא פולינום, אז $\sum_{n=1}^\infty p_n'(0) = f'(0)$.

ד. (7 נק') אם פונקציה $f(x)$ גזירה אז פונקציה של שני משתנים $g(x,y) = f(x) + f(y)$ דיפרנציאבילית בכל נקודה (x,y).

בהצלחה!

פתרונות של מבחן באינפי 2, 15.02.2013

<u>שאלה 1</u> כל פונקציה שמוגדרת בקטע סימטרי $[-1,1]$ היא סכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית:

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{h(x)-\text{זוגית}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{g(x)-\text{אי-זוגית}}$$

אזי נניח $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$. על פי הנתון $\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx=0$.

$f(x)=h(x)+g(x)$ ולכן $\int_{-1}^{1}(h(x)+g(x))g(x)dx=0$, כלומר

$$\int_{-1}^{1}h(x)g(x)dx+\int_{-1}^{1}[g(x)]^2dx=0$$

פונקציה $h(x)g(x)$ אי-זוגית, לכן $\int_{-1}^{1}h(x)g(x)dx=0$! $\int_{-1}^{1}[g(x)]^2dx=0$; $g(x)$ רציפה, לכן $g(x)=0$ לכל x.

$g(x)=0$ לכל x אומר ש:

$$f(x)=h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

פונקציה זוגית בקטע $[-1,1]$.

שאלה 2

עפ"י משפט ויירשטרס קיים $M=\max_{x\in[-1,1]}|f(x)|$

אזי $|f_n(x)| \le M|x|^n$ לכל $x\in[-1,1]$.

נוכיח ש $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ במידה שווה בקטע $[-1,1]$,

כלומר נוכיח ש

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists n_0 \quad \forall n>n_0 \quad \forall x\in[-1,1] \quad |f_n(x)|<\varepsilon$

$f(-1)=f(1)=0$, לכן עפ"י רציפות של פונקציה $f(x)$ בנקודות ± 1 קיים δ כך שלכל $x\in(1-\delta,1]$ וגם לכל $x\in[-1,1+\delta)$ מתקיים $|f(x)|<\varepsilon$.

מאחר ש $|x^n|\le 1$ $\forall x\in[-1,1]$ אזי

$|f_n(x)|=|x^n||f(x)|<\varepsilon$

$\forall x\in(1-\delta,1]$

$\forall x\in[-1,-1+\delta)$

נתבונן בקטע $[-1+\delta,1-\delta]$.

$$\max_{x\in[-1+\delta,1-\delta]}|x^n|=(1-\delta)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}(1-\delta)^n=0$$

לכן קיים אינדקס n_0 כך ש $|x^n|<\frac{\varepsilon}{M}$ $\forall x\in[-1+\delta,1-\delta]$ $\forall n>n_0$

לסיכום לכל $n>n_0$

$|f_n(x)|=|x^n|\cdot|f(x)|<\frac{\varepsilon}{M}M=\varepsilon$

$$\begin{cases}\forall x\in[-1+\delta,1-\delta] \\ \forall x\in[-1,-1+\delta)\cup[1-\delta,1]\end{cases} \quad |f_n(x)|<\varepsilon$$

מ.ש.ל.

שאלה מס' 3

נסמן $x^2=t$. אז יש לנו טור חזקות $\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$. עבור טור זה רדיוס ההתכנסות

(א) $$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty} 2\left|\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}\right|=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=2\cdot 1=2$$

$$-2\le x^2=t\le 2 \Leftarrow -\sqrt{2}\le x\le\sqrt{2}$$

רדיוס ההתכנסות של הטור המקורי שווה ל $\sqrt{2}$.

(ב) בקצוות $x=\pm\sqrt{2}$ מקבלים טור מספרי

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

טור רגיל (בערך מוחלט) מתבדר כי $n\to\infty$, $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$
וטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ מתבדר.

טור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}(-1)^n$ מתכנס בתנאי
כי כל התנאים של משפט לייבניץ מתקיים.
$\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\quad\forall n$;
$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$.

ומכאן טור חזקות בקצוות מתכנס בתנאי.

שאלה 4 לפי הגדרה קבוצה קומפקטית ב-$\mathbb{R}^n$ אם היא קבוצה סגורה וחסומה. נקודה ב-$\mathbb{R}^{n+1}=\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ אנחנו נכתוב בצורה $P'=(P,z)\in\mathbb{R}^{n+1}$ כאשר $P\in\mathbb{R}^n$, $z\in\mathbb{R}$.

נתון ש-$D\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית, לכן קיימת תיבה $T_n\subset\mathbb{R}^n$ כך ש-$D\subset T_n$. פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ רציפה, לכן על פי משפט ויירשטרס קיים קבוע $M>0$ כך ש-$|f(P)|\le M$ $\forall P\in D$ ולכן אם נסמן תיבה ב-$\mathbb{R}^{n+1}$

$$T_{n+1}=T_n\times[-M,M]=\{(P,z):\ P\in T_n,\ -M\le z\le M\}$$

אז $G_f\subset T_{n+1}$, כלומר קבוצה G_f חסומה.

נוכיח שקבוצה G_f סגורה. נניח יש סדרה

$\{P'_k\}_{k=1}^{\infty}=\{(P_k,z_k)\}_{k=1}^{\infty}\subset G_f$ שמתכנסת

$P'_k\xrightarrow[k\to\infty]{} P'_0=(P_0,z_0)$ ב-$\mathbb{R}^{n+1}$.

צריך להוכיח ש-$P'_0\in G_f$. לפי הגדרה של התכנסות ב-$\mathbb{R}^n$ מתקיים

$P_k\xrightarrow[k\to\infty]{} P_0$, $z_k\xrightarrow[k\to\infty]{} z_0$ ב-$\mathbb{R}^n$

$P_0\in D$ כי קבוצה D סגורה.

$f(P_k)\xrightarrow[k\to\infty]{} f(P_0)$ כי פונקציה f רציפה.

$$-|f(P_k)|\le z_k\le |f(P_k)|$$

$$-|f(P_0)|\le z_0\le |f(P_0)|$$

לכן גם [illegible] ש-$P'_0\in G_f$. מ.ש.ל.

שאלה 5

א) הטענה נכונה. נשתמש במבחן דיריכלה.

$$\int_1^\infty f(x^\alpha)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} x^\alpha = t \\ x = t^{1/\alpha} \end{array} \right\} = \frac{1}{\alpha}\int_1^\infty f(x)\, t^{\frac{1}{\alpha}-1}\,dt$$

$1<\alpha$, לכן $\frac{1}{\alpha}-1<0$ ולכן $t^{\frac{1}{\alpha}-1} \searrow 0$ אם $t\to\infty$.

כל התנאים של מבחן דיריכלה מתקיימים ולכן אינטגרל לא אמ' מתכנס.

ב) הטענה לא נכונה. (דוג' נגדית)

פונקציה של דיריכלה:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{אם } x \text{ רציונלי} \\ 0, & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

אז $f(\frac{k}{n})=1$ לכל $k,n\in\mathbb{N}$

אז $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(\frac{k}{n})=1$ אבל $f(x)$ לא אינטגרבילית.

ג) הטענה לא נכונה

על פי משפט ויירשטרס לכל פונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$ יש סדרה של פולינומים $\{q_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת במידה שווה ל $f(x)$ בקטע $[-1,1]$. נסמן $P_1(x)=q_1(x)$, $P_k(x)=q_k(x)-q_{k-1}(x)$

אז $\sum_{k=1}^{n}P_k(x)=q_n(x)$ ולכן

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k(x) = f(x)$ במידה שווה בקטע
$[-1,1]$. אבל $f(x)$ לא חייבת להיות גזירה
בכלל, למשל $f(x)=|x|$ רציפה ב $[-1,1]$
ולא גזירה בנקודה 0, לכן
לא קיים $\Leftarrow$ $f'(0) \neq \sum_{n=1}^{\infty} p_n'(0)$

ו) <u>טענה נכונה</u> $f(x)$ גזירה, לכן

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$
$$f(y+\Delta y) - f(y) = f'(y)\Delta y + \alpha(\Delta y)\Delta y$$

כאשר $\alpha(\Delta x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} 0$. לכן

$$g(x+\Delta x, y+\Delta y) - g(x,y) =$$
$$= f(x+\Delta x) - f(x) + f(y+\Delta y) - f(y) =$$
$$= f'(x)\Delta x + f'(y)\Delta y + \alpha(\Delta x)\Delta x + \alpha(\Delta y)\Delta y =$$
$$= \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)\Delta x + \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\Delta y + \alpha(\Delta x)\Delta x + \alpha(\Delta y)\Delta y$$

$\alpha \xrightarrow[\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}]{} 0$, ולכן $g(x,y)$ דיפרנציאבילית
על פי הגדרה של דיפרנציאביליות.