

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 12.08.2014, מועד ב'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות. בשאלה 3 יש סעיף בונוס נוסף.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב "לא יודע" ולקבל 20% מהנקודות (פרט לסעיף בונוס של שאלה 3).
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן _____

שאלה 1

מצאו את כל הפונקציות $f(x)$ שמקיימות את התנאים הבאים

$$(1) \quad f(x) \text{ רציפה לכל } x \in [0, \infty) \text{ ו- } f(x) \neq 0 \text{ לכל } x > 0.$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{x}{n}\right) + f\left(\frac{2x}{n}\right) + f\left(\frac{3x}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{nx}{n}\right) \right) = \frac{[f(x)]^3}{3x} \quad \text{לכל } x > 0.$$

שאלה 2

חקרו האם האינטגרל הלא אמתי (גם מסוג 1 ומסוג 2) מתכנס בהחלט/בתנאי או אינטגרל מתבדר.

$$\int_1^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi\sqrt{x}}{2}\right)}{\ln x} dx$$

שאלה 3

יהי טור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n(\ln n)^p} = S(x)$, כאשר $p \geq 0$ קבוע.

(א) נקודות הוכיחו כי פונקציה $S(x)$ מוגדרת לכל $x \in (0, 2\pi)$.

(ב) נקודות נניח $p \leq 1$. הוכיחו שטור לא מתכנס במידה שווה בתחום $(0, 2\pi)$.

(ג) בונוס - נקודות נניח $p > 1$. הוכיחו כי פונקציה $S(x)$ רציפה בתחום $(-\infty, \infty)$.

שאלה 4

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x+y}{x^2+y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{(א) נקודות תהי נתונה הפונקציה}$$

חקרו האם $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

(ב) (15 נקודות) נניח כי פונקציה $g(x, y)$ חסומה בסביבה של נקודה $(0, 0)$ ופונקציה $f(x, y)$ מקיימת

את התכונה הבאה: $|f(x, y)| \leq |xy| \|g(x, y)\|$ לכל (x, y) .

הוכיחו כי הפונקציה $f(x, y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0, 0)$.

שאלה 5

נתונה הפונקציה $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - (2x^2 + 3y^2)^2$

(א) (10 נקודות) מצאו את נקודות האקסטריםום המקומי של פונקציה $f(x, y)$.

(ב) (15 נקודות) מצאו את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר בתחום: $G = \{(x, y) : 2x^2 + 3y^2 \leq 1\}$.

בהצלחה!