בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 29.01.2016, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________________

שאלה 1 (25 נקודות)

נתון כי שתי פונקציות $f(x),g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$ ומתקיים $g(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכיחו שקיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

רמז: יש להיעזר במשפטים הרלבנטיים של קורסי אינפי 1 ואינפי 2.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתון האינטגרל הלא אמתי $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}dx$.

קבעו האם האינטגרל מתכנס בהחלט \ בתנאי או מתבדר.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי טור $S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^x}$.

(א) (15 נקודות) הוכיחו שפונקציה $S(x)$ מוגדרת ורציפה בתחום $X=(1,\infty)$.

(ב) (10 נקודות) האם הטור מתכנס במידה שווה בתחום $X=(1,\infty)$?

<u>שאלה 4</u> (25 נקודות)

נתונה פונקציה $f(x,y)=(|x+y|)^{\alpha}$, כאשר $\alpha>0$ קבוע.

יש לתאר את כל α כך שפונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$.

<u>שאלה 5</u> (25 נקודות)

יהי $D\subset R^2$ תחום הגדרה <u>קומפקטי</u> של פונקציה $f:D\to R$.

נסמן על ידי Γ_f גרף של f - תת-קבוצה הבאה של R^3:

$\Gamma_f=\{(x,y,z)\in R^3 : z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\}$.

(א) (15 נקודות) הוכיחו שאם f פונקציה רציפה בתחום D אז Γ_f היא קבוצה קומפקטית.

(ב) (10 נקודות) הוכיחו שאם Γ_f קבוצה קומפקטית אז f פונקציה רציפה בתחום D.

בהצלחה!

29.01.2016

פתרונות של מבחן 29.01.16 אינפי 2

<u>שאלה 1</u> פונקציות $f(x)$, $g(x)$ רציפות בקטע $[a,b]$, לכן על פי המשפט היסודי של חדו"א קיימות פונקציות קדומות $F(x)$, $G(x)$. על פי נוסחת ניוטון-לייבניץ

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)\,;\quad \int_a^b g(x)\,dx = G(b)-G(a)$$

כיון פונקציות $F(x)$, $G(x)$ מקיים את כל התנאים של משפט קושי, לכן קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש:

$$\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

ומכאן

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx} = \frac{f(c)}{g(c)}$$ מ.ש.ל.

<u>שאלה 2</u>

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}\,dx = \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}\,dx}_{(I)} + \underbrace{\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}\,dx}_{(II)} + \underbrace{\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}\,dx}_{(III)} + \underbrace{\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\infty} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}}_{(IV)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})} = 0\,,\quad \lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})} = 2\,,$$

$\sin x$ שומר על הסימן בכל האינטגרלים I, II, III, לכן אינטגרלים I, II, III מתכנסים בהחלט כל אחד. אינטגרל IV לא מתכנס בהחלט כי

$$\frac{|\sin x|}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})} \sim \frac{|\sin x|}{x}\,,\quad x\to\infty$$

ואינטגרל $\int_{3\pi/2}^{\infty}\frac{|\sin x|}{x}dx$ מתבדר (כפי שלמדנו בקורס)

אינטגרל IV מתכנס על פי מבחן דיריכלה

כי $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}$ מונוטונית יורדת ל 0

כאשר $x\to\infty$, ופונקציה קדומה של $\sin x$ חסומה.

לסיכום, $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}(\sqrt{\pi}-\sqrt{x})}dx$ מתכנס בתנאי!

<u>שאלה 3</u>

(א) נקבע $a>1$ כלשהו. אזי

$$\left|\frac{1}{n(\ln n)^x}\right|\le\frac{1}{n(\ln n)^a}\qquad \forall x\in[a,\infty)\quad \forall n\ge 2$$

טור מספרי חיובי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^a}$ מקיים תנאים של מבחן אינטגרלי. אינטגרל לא אמתי $\int_2^{\infty}\frac{1}{x(\ln x)^a}dx$ מתכנס לכל $a>1$ ולכן גם טור מספרי מתכנס. לכן על פי M-מבחן של ויירשטרס טור פונקציות מתכנס במידה שווה בתחום $[a,\infty)$ ולכן סכום של טור $S(x)$ פונקציה רציפה בתחום $[a,\infty)$. משום ש $a>1$ שרירותי אזי $S(x)$ רציפה לכל $x>1$.

(ב) נזכיר משפט: אם טור של פונקציות רציפות מתכנס במידה שווה בתחום $x=(1,\infty)$ אזי הוא גם מתכנס בנקודה $x=1$. אולם טור מספרי $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתבדר על פי מבחן אינטגרלי. לכן התשובה: "לא".

שאלה 4

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|^{\alpha} - 0}{x} = \lim_{x\to 0} \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\text{חסום}}\underbrace{|x|^{\alpha-1}}_{\to 0} = 0$$

אם ורק אם $\alpha>1$. אחרת גבול כזה לא קיים.

ומכאן נדרוש $\alpha>1$ ונוכיח כי פונקציה כן דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$

$$\underbrace{f(x,y)-f(0,0)}_{0} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}_{0}x + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}_{0}y + \varepsilon\cdot\sqrt{x^2+y^2}$$

לכן

$$\varepsilon = \frac{|x+y|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\varepsilon = |x+y|^{\alpha-1}\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le |x+y|^{\alpha-1}\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \le$$

$$\le 2|x+y|^{\alpha-1}$$

כי

$$\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1, \quad \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le 1,$$

$\alpha>1$ ולכן $\lim_{x,y\to 0}|x+y|^{\alpha-1}=0$ ולכן $\lim_{x,y\to 0}\varepsilon=0$ על פי "סנדוויץ'". ומכאן f דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$ אם ורק אם $\alpha>1$.

שאלה 5

(א) f פונקציה רציפה בתחום קומפקטי, לכן על פי משפט ויירשטרס f חסומה, כלומר

$$\exists C>0 \quad \forall (x,y)\in D \quad |f(x,y)|\le C$$

D קבוצה חסומה, לכן גם גרף Γ_f קבוצה חסומה המוכלת ב- $D\times[-C,C]\subset\mathbb{R}^3$.

נוכיח כי Γ_f קבוצה סגורה: נניח $\Gamma_f \supset \{(x_n,y_n,z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שמתכנסת לנקודה (x_0,y_0,z_0).

$(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$, לכן $(x_0,y_0) \in D$ כי D סגורה ב R^2.

f פונקציה רציפה, לכן $f(x_n,y_n) \to f(x_0,y_0)$, כלומר

$z_0 = f(x_0,y_0)$, כלומר $(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma_f$ ו Γ_f סגורה.

(ב) נניח בשלילה שפונקציה f לא רציפה

בנקודה $(x_0,y_0) \in D$. Γ_f קבוצה חסומה, לכן

תחום ערכים של פונקציה f גם קבוצה חסומה

ולכן אי-רציפות של f ב (x_0,y_0) גורר את

שקיימות שתי סדרות שונות

$(x_n,y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0,y_0)$, $(x_n',y_n') \xrightarrow[n\to\infty]{} (x_0,y_0)$ כך ש:

$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = L$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n',y_n') = L'$! $L \neq L'$.

על פי הנחה Γ_f קבוצה סגורה, לכן

$(x_0,y_0,L) \in \Gamma_f$ וגם $(x_0,y_0,L') \in \Gamma_f$!

אבל זה לא יתכן, לכל (x_0,y_0) הערך

$z_0 = f(x_0,y_0)$ הוא יחיד: רק $(x_0,y_0,z_0) \in \Gamma_f$.

סתירה זאת אומרת ש: f כן רציפה ב (x_0,y_0).