הפקולטה למדעי הטבע
המחלקה למתמטיקה

אוניברסיטת בן-גוריון בנגב
Ben-Gurion University of the Negev

בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 13.02.2019, מועד ב'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: ד"ר ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע"** ולקבל 20% מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ________________

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[0,1]$ ו- $f(x)\geq 0$ לכל $x\in[0,1]$.

הראו כי קיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left[f(x)\right]^n dx$ אם ורק אם $f(x)\leq 1$ לכל $x\in[0,1]$

שאלה 2 (25 נקודות)

חקרו את ההתכנסות בתנאי/בהחלט של אינטגרל הלא אמתי $\int_0^\infty \frac{\sin(x^3)}{x^p}dx$, $p>-2$.

שאלה 3 (25 נקודות)

(א) (10 נקודות) יהי $a_n=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}$. מצאו את הרדיוס R ההתכנסות של הטור חזקות $\sum_{n=1}^\infty a_n x^n$.

(ב) (15 נקודות) האם טור הזה מתכנס במידה שווה בתחום $[0,R)$? בתחום $(-R,0]$?

שאלה 4 (25 נקודות)

חקרו את הדיפרנציאביליות של הפונקציה $f(x)=\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)^3$ בנקודה $(0,0)$.

שאלה 5 (25 נקודות) תהי $G\subset R^2$ קבוצה כלשהי במישור.

נניח כי G מקיימת את התכונה הבאה: אם $f(x,y):G\to R$ פונקציה רציפה אז קבוצת ערכים שלה $f(G)=\{f(x,y):(x,y)\in G\}\subset R$ חסומה ב- R. הוכיחו כי G קבוצה קומפקטית.

בהצלחה!

אינפי 2

פתרון של המבחן מועד ה', 2019

שאלה 1

נניח ש $f(x)\le 1$ לכל $x\in[0,1]$. אז לכל n ו לכל $x\in[0,1]$

$0\le[f(x)]^{n+1}\le[f(x)]^n\le 1$

לפי כך הסדרה $\left\{\int_0^1[f(x)]^n dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת. לגבול סופי.

נניח שקיים $0\le a\le 1$ כך ש- $f(a)>1$. לפי הרציפות של $f(x)$ אפשר להניח ש $0<a<1$ אז עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}(f(a)-1)$ קיים $\delta>0$ כך ש- $0<a-\delta<a<a+\delta<1$ ו $f(x)\ge 1+\varepsilon$ לכל $a-\delta\le x\le a+\delta$. מזה נובע ש-

$$\int_0^1[f(x)]^n dx\ge\int_{a-\delta}^{a+\delta}[f(x)]^n dx\ge\int_{a-\delta}^{a+\delta}[1+\varepsilon]^n dx=[1+\varepsilon]^n(2\delta)$$

לכן $\lim_{n\to\infty}\int_0^1[f(x)]^n dx=\infty$ כי $\lim_{n\to\infty}(1+\varepsilon)^n=\infty$.

שאלה 2 נעשה הצבה $x^3=t$. $x=t^{1/3}$

אז $x=t^{1/3}$, $dx=\frac{1}{3}t^{-\frac{2}{3}}dt$

$$\int_0^\infty\frac{\sin(x^3)}{x^p}dx=\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t^{p/3}}\frac{1}{3}\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}dt=\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{\sin(t)}{t^{\frac{p+2}{3}}}dt$$

נסמן $\frac{p+2}{3}=\alpha$,

$$\int_0^\infty\frac{\sin t}{t^\alpha}dt=\int_0^1\frac{\sin t}{t^\alpha}dt+\int_1^\infty\frac{\sin t}{t^\alpha}dt$$

$$\int_0^1\frac{\sin t}{t^\alpha}dt\sim\int_0^1\frac{1}{t^{\alpha-1}}dt<\infty\iff\alpha-1<1\iff\alpha<2$$

$\int_1^\infty\frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ נלמד בשיעורים והוא מתכנס על פי מבחן דירכלה לכל סכל.

אם $\alpha>1$ אז אינטגרל זה מתכנס בהחלט.

$1<\frac{p+2}{3}<2\iff\underline{1<p<4}\iff$ אינטגרל $\int_0^\infty\frac{\sin(x^3)}{x^p}dx$ מתכנס בהחלט.

אם $0<\alpha\le 1$ אז אינטגרל $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t^\alpha}dt$ מתכנס בתנאי $\Leftarrow$

$0<\frac{p+2}{3}\le 1\iff\underline{-2<p\le 1}$

שאלה 3

(א)

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}$$

מפני ש- $1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{n} \geq 1$

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)} = 0$, לכן לפי מבחן דאלמבר רדיוס התכנסות שווה ל- $1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = R$

(ב)

התכנסות בקצוות

קצה $x=1$

$$a_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} \geq \frac{1}{1+1+\ldots\ldots+1} = \frac{1}{n}$$

לכן $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ מתבדר מפני שהטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר.

קצה $x=-1$

ברור שלכל n $a_{n+1} \leq a_n$, מפני ש- $\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} = \infty$ נקבל ש - $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

לכן לפי מבחן ליבניץ הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_n(-1)^n$ מתכנס.

תשובה: על פי משפט Abel טור לא מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1)$ ולכן מתכנס במידה שווה בקטע $[-1,0]$.

שאלה 4

$$f'_x(0,0) = \frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}x\Big|_{x=0} = 1$$

$$f'_y(0,0) = \frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0} = \frac{d}{dy}y\Big|_{y=0} = 1$$

$$f(0,0) = 0$$

נרשום את ה $f(x,y)$ בצורה:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,y) + \varepsilon\rho = x + y + \varepsilon\rho$$

כאשר $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ אז עבור $\rho \neq 0$

$$\varepsilon = \frac{(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})^3 - x - y}{\rho} = \frac{3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2}}{\rho}$$

אם נניח ש- $x=y$ אז $\varepsilon = \frac{3\sqrt[3]{x^2x}+3\sqrt[3]{xx^2}}{\rho} = \frac{6x}{\sqrt{2}|x|} = \pm\frac{6}{\sqrt{2}}$

לכן ε אינו שואף ל-0 כאשר $\rho \to 0$. זה אומר ש- $f(x,y)$ לא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$.

<u>שאלה 5</u> $G\subset\mathbb{R}^2$ קבוצה קומפקטית אם ורק אם $G\subset\mathbb{R}^2$
קבוצה חסומה וסגורה. נניח בשלילה כי
G לא קומפקטית.

<u>מקרה א'</u> G לא חסומה. נתבונן בפונקציה רציפה

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

אם G לא חסומה אז לכל $C>0$ קיימת $(x,y)\in\mathbb{R}^2$
כך ש $x^2+y^2>C$, כלומר $f(G)\subset\mathbb{R}$ קבוצה לא חסומה
הגענו לסתירה שאלה.

<u>מקרה ב'</u> G לא סגורה.
אזי יש סדרה של נקודות $\{P_n(x_n,y_n)\}_{n=1}^{\infty}\subset G$
כך ש $P_n\to P_0(x_0,y_0)$ אבל $P_0\notin G$.
נתבונן בפונקציה רציפה

$$g(x,y)=\frac{1}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

$g(x,y):G\to\mathbb{R}$ ורציפה כי $P_0(x_0,y_0)\notin G$.
אבל $g(x,y)$ לא חסומה, כי
$g(x_n,y_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ואז
$g(G)\subset\mathbb{R}$ קבוצה לא חסומה. קיבלנו סתירה גם במקרה
א' וגם במקרה ב', לכן G כן חסומה וכן סגורה, צ"ל קומפקטית.