בחינה בחשבון אינפיניטסימלי 2, תאריך 11.07.2019, מועד א'
מספר הקורס: 201-1-0021, תוכנית אקדמיזציה לטייס
המרצה: פרופ' ארקדי ליידרמן

- משך הבחינה: 3 שעות
- יש לענות על 4 מתוך 5 שאלות. משקל של כל שאלות הוא 25 נקודות.
- יש לנמק ולהוכיח את כל טענותיכם!
- **אין להשתמש בחומר עזר פרט למחשבון פשוט ללא צג גרפי.**
- בכל שאלה/סעיף ניתן לכתוב **"לא יודע\ת"** ולקבל 20% מהנקודות. הציון הסופי של שאלה יהיה מעוגל מעלה.
- שאלות/סעיפים בהם כתבתם "לא יודע\ת" לא ייבדקו.

מספר הנבחן ____________

שאלה 1 תהי $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,1]$ ומקיימת תנאי $f(x)>0$ לכל $x\in[0,1]$.

(א) (15 נקודות) בעזרת תכונות של אינטגרל רימן הראו כי קיים גבול סופי $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right)f\left(\frac{2}{n}\right)\cdots f\left(\frac{n}{n}\right)}=C$.

(ב) (10 נקודות) מצאו את הערך המדויק של C עבור הפונקציה $f(x)=x^2+1$.

שאלה 2 יהיו $f(x),g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בכל קטע סופי ונניח כי $f(x)\neq 0, g(x)\geq 0$ לכל x.

(א) (15 נקודות) הוכיחו כי אם ואינטגרלים לא אמתיים $\int_1^\infty f(x)g(x)dx; \int_1^\infty \frac{g(x)}{f(x)}dx$ שניהם מתכנסים בהחלט

אז גם אינטגרל לא אמתי $\int_1^\infty g(x)dx$ מתכנס בהחלט.

(ב) (10 נקודות) תנו דוגמא לכך ש - $\int_1^\infty f(x)g(x)dx; \int_1^\infty \frac{g(x)}{f(x)}dx$ שניהם מתכנסים בתנאי ו- $\int_1^\infty g(x)dx$ מתבדר.

שאלה 3 נניח כי סדרה של פונקציות רציפות $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה בתחום $X\subseteq R$.

(א) (15 נקודות) הוכיחו כי אם תחום X קומפקטי אז גם סדרה $\{f_n{}^2(x)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת במידה שווה בתחום X.
(ב) (10 נקודות) תנו דוגמא לכך שטענה זאת לא נכונה עבור $X=R$.

שאלה 4 תהי מוגדרת הפונקציה
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{2x^2+3y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(א) (10 נקודות) חקרו את הרציפות של פונקציה בנקודה $(0,0)$.

(ב) (15 נקודות) חקרו את הדיפרנציאביליות של פונקציה בנקודה $(0,0)$.

שאלה 5 (25 נקודות)

נתון כי פונקציה $f(x,y,z):R^3\to R$ רציפה וחסומה.

נתבונן בקבוצה $G=\{(x,y,z)\in R^3 : |f(x,y,z)|\geq|x|+|y|+|z|\}$. הוכיחו כי G קבוצה קומפקטית.

בהצלחה!

11.07.2019

פתרון של מבחן מאינפי' 2, 11.07.2019

שאלה 1 (א) נסמן $a_n = \sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n}{n})}$,

$a_n>0$ כי $f(x)>0$. $\ln a_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln f(\frac{i}{n})$

זה סכום אינטגרלי של רימן של פונקציה $\ln(f(x))$.

לכן $\ln C = \lim_{n\to\infty} a_n = \int_0^1 \ln(f(x))\,dx$

תשובה: $C = e^{\int_0^1 \ln(f(x))\,dx}$

(ב) $f(x)=x^2+1$.

$$\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = \text{בחלקים} = \ln(x^2+1)\,x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1} = 2\int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = 2(x-\operatorname{arctg} x)\Big|_0^1 = 2-\frac{\pi}{2}$$

$$C = \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

תשובה: $e^C = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$

שאלה 2 (א) לכל x מתקיים כי $2 \le |f(x)| + \frac{1}{|f(x)|}$,

לכן מאחר ש $g(x)\ge 0$

$$0 \le g(x) \le \frac{1}{2}|f(x)|\,g(x) + \frac{1}{2}\frac{g(x)}{|f(x)|}$$

לכן אינטגרל $\int_1^\infty g(x)\,dx = \int_1^\infty |g(x)|\,dx$ מתכנס

לפי מבחן ההשוואה.

(ב) לדוגמה

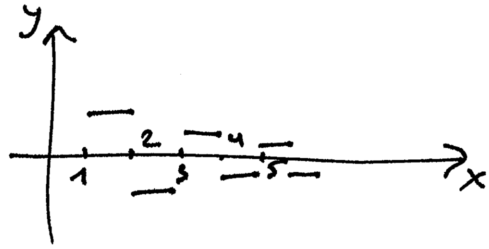
$$f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{n+1}, & n\le x<n+1 \quad \text{אם } n \text{ זוגי:} \\ +\frac{1}{n}, & n\le x<n+1 \quad \text{אם } n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

$g(x)=1,\quad x\ge 1$

כמובן $\int_1^\infty g(x)dx$ מתבדר. אולם

$$f(x)g(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}-\frac{1}{n-1}, & n\le x<n+1, & n \text{ זוגי}\\ +\frac{1}{n}, & n\le x<n+1, & n \text{ אי-זוגי}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}+1, & 1\le x<2\\ -1, & 2\le x<3\\ \frac{1}{3}, & 3\le x<4\\ -\frac{1}{3}, & 4\le x<5\end{cases}$$



וכו'

אם נקח b כלשהו, ו-$k\in\mathbb{N}$ מספר אי-זוגי הקרוב מעבר ל-b משמאלו אז

$$\left|\int_1^b f(x)g(x)\,dx\right|\le\frac{1}{k}$$

ולכן $\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)g(x)dx=0$.

<u>שאלה 3</u>

(א) נתון כי קיים פונקציה $f(x)$ כך ש-
$f_n(x)\to f(x)$ במידה שווה בתחום X.

נסמן $C_n=\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$. אזי $C_n\to 0$.

נזכיר כי $f(x)$ גם פונקציה רציפה, כי כל $f_n(x)$ פונקציות רציפות והתכנסות היא במידה שווה.

נסמן $M=\max_{x\in X}|f(x)|$. קיים כי $f(x)$ רציפה בתחום קומפקטי X. יהי למשל $\varepsilon=1$.

$$\exists n_0 \quad \forall n > n_0 \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < 1$$

לכן $\max\limits_{x\in X} |f_n(x)| \le M+1 \quad \forall n > n_0$.

נתבונן ב $f_n^2(x) - f^2(x)$.

$$|f_n^2(x) - f^2(x)| = |f_n(x) - f(x)|\,|f_n(x) + f(x)|$$

לכן $|f_n^2(x) - f^2(x)| \le C_n \cdot (2M+1) \quad \forall n > n_0 \quad \forall x \in X$

$$\forall n > n_0 \quad \max_{x\in X} |f_n^2(x) - f^2(x)| \le C_n \cdot (2M+1)$$

$C_n \to 0$ לכן גם $\max\limits_{x\in X} |f_n^2(x) - f^2(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ב) נגדיר $f(x) = x$, $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ לכל $x \in R$

אז $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ לכל x .

אבל $f_n^2(x) - f^2(x) = 2x \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$

$$\sup_{x\in R} |f_n^2(x) - f^2(x)| = \infty \not\to 0$$

כלומר אין התכנסות במידה שווה ב R .

שאלה 4 (א)

$$0 \le |f(x,y)| \le \left|\frac{x^3}{2x^2+3y^2}\right| + \left|\frac{y^3}{2x^2+3y^2}\right| \le \frac{|x|}{2} + \frac{|y|}{3}$$

לכן $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0$ לפי משפט "סנדוויץ'"

כלומר $f(x,y)$ רציפה ב $(0,0)$.

(ב)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \frac{1}{3}$$

$$f(x,y) = 0+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$$

לכן

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x^3+y^3}{2x^2+3y^2}-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)$$

נתבונן מה קורה במקרה $x=y$.

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2x^2}}\left(\frac{2x^3}{5x^2}-\frac{5}{6}x\right) = \frac{1}{\sqrt{2x^2}}\left(-\frac{13}{30}x\right) \not\to 0$$

לא מתקיים כי $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \varepsilon = 0$, לכן $f(x,y)$

לא דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$

שאלה 5

נוכיח כי G קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^3$.

נניח כי $P_n(x_n,y_n,z_n)\to P_0(x_0,y_0,z_0)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

אז $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$, $z_n\to z_0$

$|f(x_n,y_n,z_n)| \ge |x_n|+|y_n|+|z_n|$ לכל n.

אם נעבור ל- $n\to\infty$ אז נקבל כי

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n,y_n,z_n)| \ge |x_0|+|y_0|+|z_0|$$

$$|f(x_0,y_0,z_0)| = \lim_{n\to\infty}|f(x_n,y_n,z_n)|$$

כי f רציפה בכל נקודה!

ולכן $P_0(x_0,y_0,z_0)\in G$.

נוכיח כי G קבוצה חסומה ב־$\mathbb{R}^3$.

נתון כי f פונקציה חסומה, כלומר קיים קבוע סופי C כך ש

$$|f(x,y,z)| \le C \qquad \forall (x,y,z)$$

לכן

$$|x|+|y|+|z| \le C \qquad \forall (x,y,z)\in G$$

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} \le |x|+|y|+|z|$$

לכן G מוכלת בכדור סביב O עם רדיוס C

ז"א G קבוצה חסומה.

G סגורה וחסומה = קומפקטית.