אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן: ____________

ענה על 5 שאלות. חובה לענות על שאלה ראשונה. כל התשובות תהיינה מלאות ומנומקות היטב.

תאריך הבחינה: 30.06.1996
שם המורה: בליצקי, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021-2
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: מחשב כיס עם צג קטן בלבד

השאלות:

1. (20 נקודות) נסח והוכח את המשפטים על אינטגרציה וגזירה של טור של פונקציות איבר איבר.

2. (26 נקודות) חקור את ההתכנסות האינטגרל $\int_0^\infty e^{\sin x}\dfrac{\sin 2x}{x^p}dx$

א. בהחלט
ב. בתנאי

3. (26 נקודות) תהיה $f(x,y)$ פונקציה מוגדרת במישור $\mathbb{R}^2$ ובעלת נגזרות חלקיות $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ רציפות בנקודה $(0,0)$. הוכח שאם פונקציה $f(x,y)$ מקיימת את התכונה $f(tx,ty)=tf(x,y)$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ולכל t ממשי, אז היא פונקציה ליניארית, כלומר $f(x,y)=ax+by$, כאשר a,b קבועים.

4. (18 נקודות) תהיה נתונה העקומה בקוארדינאטות קוטביות $\rho=\cos^2\varphi,\ -\dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

א. חשב את השטח המוגבל על-ידי הקומה,
ב. חשב את האורך של העקומה

5. (18 נקודות) נתון הטור החזקות - $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}x^n$.

א. חשב עבורו את הרדיוס ההתכנסות
ב. חקור את התכנסות הטור בקצוות של קטע ההתכנסות.

6. (18 נקודות) נתונה פונקציה : $\alpha\ge 0$, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$.

א. הוכח כי פונרציה רציפה בנקודה $(0,0)$,
ב. הוכח כי נגזרות חלקיות $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ קיימות ב- $(0,0)$,
ג. הוכח כי כי הנגזרת $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$ אמ"ם $0\le\alpha<2$.

7. (18 נקודות) נתונה פונקציה $f(x,y)=25x^2+y^2-\left(5x^2+y^2\right)^2$.

א. מצא את כל הנקודות הקיצון שלה במישור ולכל אחד מהן קבע אם היא נקודת מינימום או מקסימום,
ב. חשב את הערךהגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחום $x^2+y^2\le 1$

פיתרון של המבחן מועד א' 1996

שאלה 2

$$\int_0^\infty e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx=\int_0^1 e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx+\int_1^\infty e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$$

א. התכנסות בהחלט. אם $0\le x\le 1$ אזי $\frac{\sin 2x}{x^p}\ge 0$ ולכן כמובן $e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}\ge 0$.

$\int_0^1 e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx\sim\int_0^1\frac{2x}{x^p}dx=2\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}dx$. ז"א ש- $\int_0^1 e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$ מתכנס אם"ם $p<2$.

$\int_1^\infty\left|e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}\right|dx\le\int_1^\infty e^1\frac{1}{x^p}dx$ לכן מתכנס עבור $p>1$. נוכיח עכשיו שעבור $p\le 1$ אינטגרל

$I=\int_1^\infty\left|e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}\right|dx$ מתבדר. $|\sin 2x|\ge\sin^2 2x$, כי $|\sin 2x|\le 1$, $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$, לכן

$I\ge\frac{1}{2}\int_1^\infty e^{\sin x}\frac{1-\cos 4x}{x^p}dx=\frac{1}{2}\int_1^\infty e^{\sin x}\frac{1}{x^p}dx-\frac{1}{2}\int_1^\infty e^{\sin x}\frac{\cos 4x}{x^p}dx$, $0<e^{-1}\le e^{\sin x}\le e^1$, לכן אינטגרל

$\int_1^\infty e^{\sin x}\frac{1}{x^p}dx$ מתבדר עבור $p\le 1$. נוכיח כי אינטגרל $\int_1^\infty e^{\sin x}\frac{\cos 4x}{x^p}dx$ מתכנס עבור $0<p\le 1$. אנחנו נשתמש

במבחן דיריכלה. אם $p>0$ אזי $\frac{1}{x^p}$ בקטע $[1,\infty)$ פונקציה יורדת באופן מונוטוני לאפס. נראה כי לכל $A>1$

$\left|\int_1^A e^{\sin x}\cos 4x dx\right|\le M$, כאשר M קבוע. נעבור למשתנה חדש $u=x+\frac{\pi}{8}$, אז

$\cos 4x=\cos 4\left(u-\frac{\pi}{8}\right)=\sin 4u$, $\cos 4x=4\sin u\cos u\cos 2u$ או $\sin 4u=4\sin u\cos u(1-2\sin^2 u)$,

$\sin x=\sin\left(u-\frac{\pi}{8}\right)=\sin u\cos\frac{\pi}{8}-\cos u\sin\frac{\pi}{8}=\sin u\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{1-\sin^2 u}\sin\frac{\pi}{8}$. בסופו של דבר

$$\left|\int_{1+\frac{\pi}{8}}^{B} e^{\left(\sin u\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{1-\sin^2 u}\sin\frac{\pi}{8}\right)}4\sin u(1-2\sin^2 u)d\left(\sin u\right)\right|=\{t=\sin u\}=\left|\int_{\sin\left(1+\frac{\pi}{8}\right)}^{\sin B} e^{\left(t\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{1-t^2}\sin\frac{\pi}{8}\right)}4t(1-2t^2)d\left(t\right)\right|\le M$$

כאשר M זה מקסימום של פונקציה $\left|e^{\left(t\cos\frac{\pi}{8}-\sqrt{1-t^2}\sin\frac{\pi}{8}\right)}4t\left(1-2t^2\right)\right|$ בקטע $[-1,1]$

הוא קיים כי פונקציה רציפה בקטע סגור $\left[\sin\left(1+\frac{\pi}{8}\right),\sin B\right]\subset[-1,1]$

לפי מבחן דיריכלה מקבלים: אינטגרל I מתבדר עבור $0<p\le 1$.

ו $\int_0^1 e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$ -ו $\int_1^\infty e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$ נותנים לנו שאינטגרל $\int_0^\infty e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$ מתכנס בהחלט אם"ם $1<p<2$

ב. התכנסות בתנאי. ראינו כבר כי $\int_0^1 e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$ מתכנס אם"ם $p<2$.

$\int_1^\infty e^{\sin x}\sin 2x dx = 2\int_1^\infty e^{\sin x}\sin x d(\sin x)$ לכן $\left|\int_1^A e^{\sin x}\sin x d(\sin x)\right| = \left|\int_{\sin 1}^{\sin A} e^t t dt\right| \le \int_{-1}^1 \left|e^t t\right| dt = M < \infty$.

לפי מבחן דיריכלה אינטגרל $\int_0^\infty e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx$ מתכנס אם $p>0$, כי כמו קודם $\frac{1}{x^p}\searrow 0$ כאשר $x\to\infty$.

סופית נראה כי עבור $p\le 0$ האינטגרל הנתון מתבדר. לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות:

$$\int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^p}dx \ge \int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\sin 2x dx = [t=\sin x] = 2\int_0^1 e^t t dt \not\to 0, n\to\infty$$

תשובה: אינטגרל מתכנס אם"ם $0<p<2$

<u>שאלה 3</u>

דרך 1: נקבע נקודה (x,y) ונגדיר פונקציה של משתנה ממשי t באופן הבאה $F(t)=f(tx,ty), u=tx, v=ty$. אנחנו מתיחסים ל- $F(t)$ כפונקציה מורכבת $F(t)=f(u(t),v(t))$, כאשר $u(t)=tx, v(t)=ty$. נגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial v},\frac{\partial f}{\partial u}$ קיימות ורציפות ב- $(0,0)$ לכן לפי כלל שרשרת $F'(0)=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}\right)\Big|_{t=0} = Ax+By$ כאשר $B=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0), A=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ אבל $f(tx,ty)=t\cdot f(x,y)$. לכן $F'(t)=f(x,y)$ כלומר $f(x,y)=Ax+By$.

דרך2 : נציב בזהות $f(tx,ty)=t\cdot f(x,y)$ $t=0$ ונקבל ש- $f(0,0)=0$. נתון שנגזרות חלקיות $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות ב- $(0,0)$. לכן קיימת סביבה W של נקודה $(0,0)$ שבה מתקיימים

$$f(u,v)-f(0,0)=f(u,v)=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)\cdot u+\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)\cdot v+\alpha\cdot u+\beta\cdot v$$ כאשר

$\alpha=\alpha(u,v)\xrightarrow[u,v\to 0]{}0, \beta=\beta(u,v)\xrightarrow[u,v\to 0]{}0$. נקבע נקודה (x,y). אם $t\to 0$ אזי $(tx,ty)\to(0,0)$, כלומר למספיק קטנים t נקודה (tx,ty) שייכת לסביבה W . נציב במקום (u,v) את (tx,ty) . נקבל

$$f(tx,ty)=A\cdot tx+B\cdot ty+\alpha\cdot tx+\beta\cdot ty$$ כאשר $A=\frac{\partial f}{\partial u}(0,0), B=\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$,

$\alpha=\alpha(tx,ty)\xrightarrow[t\to 0]{}0, \beta=(tx,ty)\xrightarrow[t\to 0]{}0$ אבל $f(tx,ty)=t\cdot f(x,y)$, לכן אפשר לצמצם $t\ne 0$:

$f(x,y)=A\cdot x+B\cdot y+\alpha\cdot x+\beta\cdot y$, נעבור לגבול לפי $t\to 0$ בשיוון אחרון ואז $f(x,y)=A\cdot x+B\cdot y$ כי $\lim_{t\to 0}\alpha=0, \lim_{t\to 0}\beta=0$, A,B קבועים.

דרך 3: אנחנו נשתמש במשפט ערך הביניים. שוב $f(0,0)=0$, לכן לפי משפט זהז (כמו קודם נקבע (x,y))

$t\cdot f(x,y)=f(tx,ty)-0=\frac{\partial f}{\partial x}(M_\theta)\cdot tx+\frac{\partial f}{\partial y}(M_\theta)\cdot ty$ כאשר $0\le\theta\le 1$, נקודה $M_\theta=(\theta tx,\theta ty)$ שייכת לקטע שמחבר נקודות (tx,ty) ו- $(0,0)$. שוב אפשר לצמצם $t\ne 0$ ואז $f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(M_\theta)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(M_\theta)\cdot y$ נעבור לגבול לפי $t\to 0$, ברור ש- $M_\theta\xrightarrow[t\to 0]{}(0,0)$ נתון כי $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ רציפות ב- $(0,0)$ לכן שוב מגיעים למסקנה ש-

$$f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot y$$

שאלה 4

העקומה $\rho=\cos^2\varphi\ ,\ -\frac{\pi}{2}\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$

א. $S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)d\varphi=\frac{3}{16}\pi$

ב. $L=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^4\varphi+\left(4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\right)}d\varphi=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sqrt{\cos^2\varphi+4\sin^2\varphi}d\varphi=$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\sin^2\varphi}d(\sin\varphi)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+3t^2}dt=\left\{t=\frac{s}{\sqrt{3}}\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1+s^2}ds=\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)+s\sqrt{1+s^2}\right]\Bigg|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left[2+\sqrt{3}\right]+2$

שאלה 5

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdot\ldots\cdot(3n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}x^n$

א. נחשב את רדיוסההתכנסות לפי נוסחת דלמבר : $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+5}{3n+4}=1$ לכן טור מתכנס לכל $-1<x<1$

ב. אם $x=1$ אז נשתמש במבחן רבה $\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3n+5}{3n+4}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+4}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}<1$ לכן טור ב- $x=1$ מתבדר.

אם $x=-1$ אז נשתמש במבחן ליבניץ. ראינו כבר ש- $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$ לכל n . נוכיח כי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

לכן $a_n=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdots\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)$ $\lim_{n\to\infty}(\ln a_n)=\sum_{n=0}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)$ אבל $\ln\left(1-\frac{1}{3n+2}\right)\sim-\frac{1}{3n+2}$, טור

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n+2}$ מתבדר ל- ∞ , כלומר $\lim_{n\to\infty}(\ln a_n)=-\infty$ זה גורר $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ לכן טור מתכנס בתנאי בקצה $x=-1$

שאלה 6

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}, & (x,y)\ne0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}\ ,\alpha\ge0$$

א. $\left|\frac{x^2y}{\left(x^2\right)}\right|=|y|\ \ge\left|\frac{x^2y}{\left(x^2+|y|^\alpha\right)}\right|\ge0$, $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{\left(x^2+|y|^\alpha\right)}$ לכן $\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{x^2y}{\left(x^2+|y|^\alpha\right)}=0$

פונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$

ב. $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ y=0}}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0=f_x'(x,y)$. באותו אפן מקבלים $f_y'(0,0)=0$

ג. $f_x'(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)-2x^3\cos\left(x^2+|y|^\alpha\right)}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}, & (x,y)\neq 0\\ 0, & (x,y)=0\end{cases}$ אם $0\le\alpha<2$ אזי

$0\le\left|f_x'(x,y)\right|\le\frac{|2xy|}{\left|\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|}-\frac{|2x^3y|}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}$ נעבור לגבול לפי $x\to 0, y\to 0$:

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|2xy|}{\left|\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|2xy|}{\left|\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|},\ 0\le\frac{|2xy|}{\left|\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|}\le\frac{2x|y|^{\frac{\alpha}{2}}}{\left|\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|}\cdot|y|^{1-\frac{\alpha}{2}}\le|y|^{1-\frac{\alpha}{2}}\xrightarrow[y\to 0]{}0$ לכן

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|2xy|}{\left|\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)\right|}=0$ אם $0\le\alpha<2$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|2x^3y|}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|2x^3y|}{\left(x^2+|y|^\alpha\right)}\le\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{|2xy|}{\sin\left(x^2+|y|^\alpha\right)}=0$ בסופו של דבר $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x'(x,y)=0$ אם $0\le\alpha<2$.

אם אם $\alpha\ge 2$ אז נקח פעם סדרה אם $\begin{cases}x_n=0\\ y_n=\dfrac{1}{n}\end{cases}$, אז $f_x'(x,y)=0$. פעם שניה סדרה תהיה כך ש-

$f_x'(x,y)=\frac{2tx^2}{\sin\left(x^2(1+t^\alpha\right)}-\frac{2tx^{3+\frac{\alpha}{2}}\cos\left(x^2(1+t^\alpha\right)}{\sin\left(x^2(1+t^\alpha\right)}$ $t>0$, $y_n=tx_n^{2/\alpha}$ אם $\alpha>2$ אזי איבר שני שווה ל- ∞, כאשר $x\to 0$

כי $3+\frac{2}{\alpha}<4$.אם $\alpha=2$ אזי $\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x,y)=\frac{2t}{1+t^2}-\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}$ תלוי ב- t . אם $t=1$ אז נקבל $\lim\limits_{x\to 0}f_x'(x,y)=\frac{1}{2}\neq 0$