אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה: 25.07.1997
שם המורה: בליצקי, אלפאי, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

יש לענות על שאלה אחת משתי שאלות ההוכחה (שאלות 1-2) ועל 4 שאלות מ- 3-7
לכל השאלה משקל זהה(20 נקודות).

השאלות:

1. נסח והוכח משפט קושי (אינטגרלי) להתכנסות טור חיובי.

2. הוכח מבחן ויירשטרס להתכנסות במידה שווה של טורי פונקציות.

3. עבור איזה ערכים של p,q מתכנס האינטגרל $\int_0^\infty x^q\cos\left(x^q\right)dx$?

4. נתון הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x\left(1-x\right)^{n-1}$.

א. מצא את תחום ההתכנסות שלו.

ב. מצא את הסכומו

ג. האם הטור מתכנס במדה שווה בתחום התכנסות?

5. לטור החזקות - $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin\pi\sqrt{n^2+1}$ מצא:

א. רדיוס התכנסות

ב. התנהגות בנקודות שפה $\pm R$

6. תהי $f(x,y,z)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות מסדר ראשון רציפות. הוכח כי $f(x,y,z)$ מקיימת משוואה $f(tx,ty,tz)=t^n f(x,y,z)$ לכל מספרים ממשיים x,y,z,t אם ורק אם $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=nf(x,y,z)$

7. נתונה פונקציה $f(x,y)=2x^2-x+1+\exp\left(y\right)-ye^2$

א. מצא את כל הנקודות האקסטרמום שלה במישור

ב. מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של הפונקציה ב תחום $\begin{cases} y\le \ln x \\ 1\le x\le 2 \\ y\ge 0\end{cases}$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד ב' 1997

שאלה 3

מקרה $p=0$. אזי $\int_0^\infty x^q \cos 1 dx \sim \int_0^\infty x^q dx$ מתבדר לכל q .

מקרה $p\neq 0$. נעשה הצבה $t=x^p$. נקבל אינטגרל $\frac{1}{p}\int_0^\infty t^\alpha \cos(t)dt$ כאשר $\alpha=\frac{q+1-p}{p}$. נחלק אינטגרל לשני חלקים $\int_0^\infty t^\alpha \cos(t)dt=\int_0^1 t^\alpha \cos(t)dt+\int_1^\infty t^\alpha \cos(t)dt$. $\int_0^1 t^\alpha \cos(t)dt \sim \int_0^1 t^\alpha dt$ מתכנס עבור $\alpha>-1$. האינטגרל שני מתכנס לפי מבחן דיריכלה כאשר $t^\alpha \underset{t\to\infty}{\searrow} 0$, כלומר עבור $\alpha>0$. (תנאים מספיקים למבחן דיריכלה מתקיימים כאשר $\alpha<0$). לכן נשאר לנו להראות שבמקרה $\alpha\geq 0$ האינטגרל $\int_1^\infty t^\alpha \cos(t)dt$ מתבדר. פשוט לא מתקיים תנאי הכרחי להתכנסות של אינטגרל לא אמיתי ונתבונן בקטע $\left[2\pi n, 2\pi n+\frac{\pi}{2}\right]$: $\int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} t^\alpha \cos(t)dt \geq \int_{2\pi n}^{2\pi n+\frac{\pi}{2}} \cos(t)dt = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$

כאן n מספר טבעי, ו- $t^\alpha \geq 1$ אם $\alpha\geq 0$ תנאי הכרחי להתכנסות בפרט אומר ש- $\int_T^{T+\frac{\pi}{2}} f(t)dt \underset{T\to\infty}{\to} 0$ זה לא מתקיים, לכן האינטגרל מתבדר. קיבלנו $-1<\alpha<0$, כלומר תשובה $\begin{cases} -1<\frac{q+1-p}{p}<0 \\ p\neq 0 \end{cases}$.

שאלה 4

פשוט נעשה הצבה $1-x=t$. נקבל טור $(*)$ $\sum_{n=1}^\infty x(1-x)^{n-1}=(1-t)\sum_{n=1}^\infty t^{n-1}$ רדיוס התכנסות של טור $\sum_{n=1}^\infty t^{n-1}$ שווה ל-1 , נבדוק האם הטור $(*)$ מתכנס גם בקצוות $t=\pm 1$. אם $t=1$ הטור מתכנס. אם $t=-1$ הטור מתבדר . $-1<1-x\leq 1$, $-1<t<1$

א. תשובה $0\leq x<2$ תחום התכנסות.

ב. אם $-1<t<1$ אזי $\sum_{n=1}^\infty t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$ ואזי $(1-t)\sum_{n=1}^\infty t^{n-1}=1$ כלומר $\sum_{n=1}^\infty x(1-x)^{n-1}=1$ אם $0\leq x<2$. בנקודה $x=0$ אחרת: סכום שווה לאפס ובכן $S(x)=\sum_{n=1}^\infty x(1-x)^{n-1}$ ו- $S(x)=\begin{cases} 1, & 0\leq x<2 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

ג. $S(x)$ פונקציה לא רציפה בתחום הגדרה שלה, לכן אין התכנסות במדה שווה כי סכום של טור של פונקציות רציפות מתכנס במדה שווה הוא גם פונקציה רציפה.

שאלה 5

$\sin\varphi=(-1)^n\sin(\varphi-\pi n)$ לכל φ ולכל n טבעי.

לכן $\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\frac{\pi}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$, $\sin\pi\sqrt{n^2+1}=(-1)^n\sin\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ ובכן הטור הוא

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin\pi\sqrt{n^2+1}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n(-1)^n\sin\frac{\pi}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}\quad\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}=0$$

א. $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\frac{\pi}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}}{\sin\frac{\pi}{\left(\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1\right)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{(n+1)^2+1}+n+1\right)}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}\right|=1$ (השתמשנו ב- $\sin t\sim t, t\to 0$)

ב. $x=-1$. אזי מקבלים טור לחיובי $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2n}$ מתבדר כמו טור הרמוני.

$x=1$ אזי טור עם סימנים מתחלפים: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}$. יש ירידה מונוטונית כי

$0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\sin\alpha<\sin\beta$. הטור מתכנס לפי מבחן לייבניץ.

שאלה 6

נקבע נקודה (x_0,y_0,z_0) ונגדיר פונקציה מורכבת של משתנה t $g(t)=f(tx_0,ty_0,tz_0)$. נתון ש-

$f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^nf(x_0,y_0,z_0)$ נוכיח ש-

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot x_0+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot y_0+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot z_0=nf(x_0,y_0,z_0)$. אנו נגדיר את פונקציה $g(t)$ לפי t

כפונקציה מורכבת. מותר להשתמש בכלל השרשרת מפני שכל התנאים של כלל הזה מתקיימים : נגזרות חלקיות של $f(x,y,z)$

רציפות. ובכן $g'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot x_0+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot y_0+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot z_0=nt^{n-1}f(x_0,y_0,z_0)$ בפרט בנקודה

$t=1$ נקבל זהות (2) .

בכיוון הפוך. נקבע שוב נקודה (x_0,y_0,z_0) ונגדיר פונקציה חדשה (3) $\varphi(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}$ ל- $t\neq 0$. נגזור $\varphi(t)$ לפי t

$\varphi'(t)=\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot x_0+\frac{\partial f}{\partial y}(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot y_0+\frac{\partial f}{\partial z}(tx_0,ty_0,tz_0)\cdot z_0\right]t^n-nt^{n-1}f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^{2n}}$. שיוון (2) נכון

לכל נקודה (x_0,y_0,z_0), לכן גם נכון אם נחליף (x_0,y_0,z_0) ב- (tx_0,ty_0,tz_0) אזי

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\cdot x_0+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\cdot y_0+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\cdot z_0=nt^{n-1}f(x_0,y_0,z_0)$. נציב את זה לנוסחה של $\varphi'(t)$ ונקבל

$\varphi'(t)=0$ זאת אומרת $\varphi(t)=C=const$. בפרט מ- (3) נובע ש- $\varphi(1)=f(x_0,y_0,z_0)$, לכן $f(x_0,y_0,z_0)=C$. ובכן

$\varphi(t)=\frac{f(tx_0,ty_0,tz_0)}{t^n}=f(x_0,y_0,z_0)$ או $f(tx_0,ty_0,tz_0)=t^nf(x_0,y_0,z_0)$.

<u>שאלה 7</u>

א. $f(x,y)=2x^2-x+1+\exp(y)-ye^2$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x-1=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=e^y-e^2=0\end{cases};\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{4}\\ y=2\end{cases}$$

$$f''_{xx}(x,y)=4;\ f''_{yy}(x,y)=e^y;\ f''_{xy}(x,y)=0$$

אזי $M\left(\frac{1}{4},2\right)$ אינה מינימום

ב. תחום $\begin{cases}y\le\ln x\\ 1\le x\le 2\\ y\ge 0\end{cases}$ מורכבת מ-3 חלקים.

$I_1:\begin{cases}1<x<2\\ y=0\end{cases}$ נציב לפונקציה: $1<x<2$; $g(x)=2x^2-x+2,\ g'=4x-1\Rightarrow x=\frac{1}{4}$, $x=\frac{1}{4}$ לא שייך ל- I_1.

בקצוות נחשב: $g(1)=3, g(2)=8$

$I_2:\begin{cases}x=2\\ 0<y<\ln 2\end{cases}$

$\begin{matrix}g(y)=e^y-ye^2+7\\ g'(y)=e^y-e^2=0\Rightarrow y=2\end{matrix}$, $(2,2)$ לא שייך לתחום. נחשב בקצוות $g(0)=8,\ g(\ln 2)\approx 3.88$

$I_3:\begin{cases}1<x<2\\ y=\ln x\end{cases}$

$g(x)=2x^2-e^2\ln x+1,\ g'=4x-\frac{1}{x}e^2=0\Rightarrow x=\pm\frac{e}{2}$; רק $x=\frac{e}{2}$ שייך לתחום. $g\left(\frac{e}{2}\right)\approx 2.43$

הערך הכי קטן בנקודה $(x,y)=\left(\frac{e}{2},\ln\left(\frac{e}{2}\right)\right), f\approx 2.43$ וערך הכי גדול בנקודה $(x,y)=(2,0), f\approx 8$