אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן: ______________

תאריך הבחינה: 25.06.2000
שם המורה: מרקוס, גיל, אפרת, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: ב'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: אין

יש לענות על שאלה מס'1,
וכן על ארבע בדיוק מבין השאלות 2-6
לכל השאלה משקל זהה (20 נקודות).
פטרו את שקוליכם ונמקו אותם.
נסחו במדויק תוצאות שעליהן הנכן מסתמכים..

השאלות:

1. (חובה) הוכיחו כי פונקציה מונוטונית בקטע סגור בהכרח אינטגרבילית בו.

2. בדקו את התכנסות האינטגרלים הלא אמיתיים הבאים:

א. $\int_1^{\infty} \sin(x^2+1)dx$

ב. $\int_1^{\infty} \left[1-\cos\frac{1}{(x^2+1)^{\alpha}}\right]dx$

3. הוכיחו ש:

$$\lim_{t\to\infty}\int_t^{t+\sqrt{t}} \frac{\sin x}{x}dx = 0$$

4. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}e^n$

5. חשבו את התחום ההתכנסות של טור החזקות

$$x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}--++--\ldots$$

כולל בדיקת ההתכנסות בקצבות קטע ההתכנסות.

6. נתונה הפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x\sin y}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y)\neq 0\\ 0, (x,y)=0\end{cases}.$$

א. האם $f(x,y)$ רציפה ב- $(0,0)$?

ב. חשבו את הנגזרות חלקיות של $f(x,y)$ ב- $(0,0)$?

ג. האם $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$?

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד ב' 2000

שאלה 2

א.

$$\int_1^\infty \sin(x^2+1)dx = \left\{ \begin{matrix} x^2+1=t \\ x=\sqrt{1-t^2} \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t-1}}dt$$

מתכנס לפי מבחן דיריכלה: $f(t)=\sin t$ בעלת פונקציה קדומה חסומה. $g(t)=\frac{1}{\sqrt{t-1}}$ פונקציה מונוטונית יורד לאפס עבור $t\to\infty$

ב . אם $\alpha>0$ לכן $\left(x^2+1\right)^\alpha \to 0$ עבור $x\to\infty$

לכן $1-\cos\frac{1}{(x^2+1)^\alpha} = 2\sin^2\frac{1}{(x^2+1)^\alpha} \sim 2\frac{1}{(x^2+1)^{2\alpha}} \sim \frac{2}{x^{4\alpha}}$ עבור $x\to\infty$

$1-\cos\ge 0$ לכן מותר להשתמש במבחן השוואה לפי האינטגרל מתכנס אם $4\alpha>1$ כלומר $\alpha>\frac{1}{4}$

שאלה 3

$|\sin x|\le 1$ לכן $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{x}$ לכל $x>0$

פונקציה $\frac{1}{x}$ יורדת לכן לכל $x\ge t>0$ $\left|\frac{\sin x}{x}\right|\le\frac{1}{t}$

$$\left|\int_t^{t+\sqrt{t}}\frac{\sin x}{x}dx\right| \le \int_t^{t+\sqrt{t}}\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx \le \int_t^{t+\sqrt{t}}\frac{1}{t}dx = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$\frac{1}{\sqrt{t}}\xrightarrow[t\to\infty]{}0$ לכן גם $\int_t^{t+\sqrt{t}}\frac{\sin x}{x}dx\xrightarrow[t\to\infty]{}0$

שאלה 4

$a_n=\frac{n!}{n^n}e^n$ נשתמש במבחן דלאמר $\frac{a_{n+1}}{a_n}=e\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. נוכיח ש- $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל n

ידוע ש- $e^t>\frac{1}{n}+1$ ואז $\left(\frac{1}{n}+1\right)^n < e$ מקבלים שסידרה $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ עולה, לכן $\lim_{n\to\infty}a_n\ne 0$ וטור מתבדר

שאלה 5

$|a_n|=\frac{1}{n}$ רדיוס התכנסות $R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=1$

בקצה $x=\pm1$ מקבלים טור מספרי הבא

$$(*)\quad 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}--++--...$$

נוביח שסידרה של סכומים חלקיים שלו מתכנסת ולכן הטור מתכנס .

נתבונן בשני טורים שמקיימים תנאים של מבחן לייבניץ ולכן מתכנסים :

$$(**)\ \ 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}...$$

$$(***)\ \ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}...$$

נסמן סדרת של סכומים חלקיים של 3 טורים האלה ב- $\{S_k^{'}\};\{S_k^{''}\};\{S_k^{'''}\}$ בהתאמה. $\lim_{k\to\infty} S_k^{'};\lim_{k\to\infty} S_k^{''};\lim_{k\to\infty} S_k^{'''}$ קיימים

$S_{2n}^{'}=S_n^{''}+S_n^{'''}$ ולכן גם $\lim_{n\to\infty} S_{2n}^{'}$ קיים

$$n\ge 1,\ \ S_{2n+1}^{'}=S_{2n+1}^{'}+(-1)^k\ \frac{1}{2n+1}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}^{'}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}^{'}$ כלומר טור (*) מתכנס

בקצה $x=-1$ מקבלים טור מספרי הבא

$$-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}...$$

נסמן שוב ב $\{S_k^{'}\}$ סדרה של סכומים חלקיים שלו עכשיו $S_{2n}^{'}=-S_n^{''}+S_n^{'''}$; $S_{2n+1}^{'}=S_{2n+1}^{'}+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}$ ולכן הטור מתכנס לפי אותם שיקולים.

תשובה: תחום התכנסות – קטע סגור $[-1,1]$

<u>שאלה 6</u>

א. $\left|f(x,y)\right|\le\frac{\frac{1}{2}\left(x^2+\sin^2 y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$ וכלן $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ רציפה ב- $(0,0)$ (השתמשנו בעובדות:

$(\left|ab\right|\le\frac{1}{2}(a^2+b^2))$

ב. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$ באופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ גם.

ג. נניח ש- $f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y+\varepsilon\sqrt{x^2+y^2}$ לכן לפי סעיף ב' מקבלים $\varepsilon(x,y)=\frac{x\sin y}{x^2+y^2}$.

נוכיח ש- $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\varepsilon(x,y)\ne 0$

אם $x=0$ ו $0\ne y\to 0;$ אזי $\lim\varepsilon(x,y)=0$

אם אזי $\varepsilon(x,x)=\frac{x\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\varepsilon(x,x)=\frac{1}{2}\ne 0$$

ובכן $f(x,y)$ אינה דיפרנציאבילית ב- $(0,0)$