אוניברסיטת בן גוריון בנגב

מדור בחינות

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה: 26.06.2003
שם המורה: גולדשטיין, לוין, ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 2.5 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים)

ענו על 4 השאלות מתוך 5.
כל שאלה שווה 25 נקודות.
תשובותיך תהיינה מלאה ומנומקצ היטב
נא לכתוב ברור ונקי.

השאלות:

1. כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב.

$$x(t)=\int_1^{e^{t^2}}\frac{\sin(x^3)}{x}dx$$

$$y(t)=\int_1^{e^{t^2}}\frac{\cos(x^3)}{x}dx \quad \text{כאשר} \quad 0\le t\le 1$$

2. מצא את כל הערכים של p שעבורם האינטגרל הבא:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^p}\,dx$$

א. מתכנס בהחלט.
ב. מתכנס בתנאי.

3. נתון טור החזקות הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+(-1)^n n+1}x^n$$

א. מצא את רדיוס התכנסות של הטור.
ב. חקור את ההתכנסות בקצוות.

4. תהי $f(x,y)=\sqrt{\left|x^3+y^3\right|}$

א. מצא את כל הנקודות שבהן קיימות $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y);\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$

ב. מצא את כל הנקודות שבהן פונקציה $f(x,y)$ דיפרנציאבילית

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=4x^4+9y^2-\left(2x^2+3y^2\right)^2$.

א. מצא את הנקודות אקסטרמום המקומי של הפונקציה וקבע את הסוגיהן
ב. מצא את הערך הגדול ביותר והערך הקטן ביותר של הפונקציה בתחו ם הבא: $D=\left\{(x,y):2x^2+3y^2\le 1\right\}$

-בהצלחה-

פתרון של המבחן מועד א' 2003

שאלה 1

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\int_1^{e^{t^2}}\frac{\sin(x^3)}{x}dx=\frac{\sin(e^{t^2})^3}{e^{t^2}}\frac{d}{dt}e^{t^2}=2t\sin e^{3t^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\int_1^{e^{t^2}}\frac{\cos(x^3)}{x}dx=2t\cos e^{3t^2}$$

$$e=\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_0^1 2tdt=t^2\Big|_0^1=1$$

שאלה 2

$$\int_0^\infty\frac{\sin(x^2)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin(x^2)}{x^p}dx+\int_1^\infty\frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$$

לכן $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$

$$\int_0^1\frac{\sin(\mathrm{x}^2)}{\mathrm{x}^p}dx\sim\int_0^1\frac{(\mathrm{x}^2)}{\mathrm{x}^p}dx=\int_0^1\frac{dx}{\mathrm{x}^{p-2}}$$

האינטגרל $\int_0^1\frac{\sin(\mathrm{x}^2)}{\mathrm{x}^p}dx$ מתכנס אם $p-2<1\Leftrightarrow p<3$

$$\int_1^\infty\frac{\sin(x^2)}{x^p}dx=\int_1^\infty\frac{\sin(t)}{t^{1/2}}dt=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{t^{-1/2}\sin t}{t^{p/2}}dt=\frac{1}{2}\int_1^\infty\frac{\sin t}{t^{(p+1)/2}}dt$$

האינטגרל $\int_1^\infty\frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ מתכנס בתנאי אם $0<\frac{p+1}{2}\le 1\Leftrightarrow -1<p\le 1$ ומתכנס בהחלט אם $\frac{p+1}{2}>1\Leftrightarrow p>1$

<u>תשובה</u>

לכן אינטגרל $\int_0^\infty\frac{\sin(x^2)}{x^p}dx$ מתכנס

א. אינטגרל מתכנס בתנאי אם $-1<p\le 1$

ב. אינטגרל מתכנס בהחלט אם $1<p<3$

שאלה 3

א. $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+(-1)^n n+1}\bullet\frac{(n+1)^2+(-1)^{n+1}(n+1)+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\bullet\frac{(n+1)^2\left(1+\frac{(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=1$

ב.

$x=1$

$$\frac{(-1)^n n}{n^2+(-1)^n n+1}=\frac{(-1)^n}{n}+\left(\frac{(-1)^n n}{n^2+(-1)^n n+1}-\frac{(-1)^n}{n}\right)=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{-n-(-1)^n}{n(n^2+(-1)^n n+1)}$$

הטור $\sum\frac{(-1)^n}{n}=\sum b_n$ מתכנס

$$\sum\frac{-n-(-1)^n}{n(n^2+(-1)^n n+1)}=\sum c_n$$

$|c_n|\sim\frac{1}{n^2}$ אז הטור $\sum c_n$ מתכנס, לכן טור החזקות מתכנס ב - $x=1$

$x=-1$

$$\frac{(-1)^n n(-1)^n}{n^2+(-1)^n n+1}=\frac{n}{n^2+(-1)^n n+1}=\frac{1}{n^2+(-1)^n+\frac{1}{n}}\sim\frac{1}{n}$$

לכן טור החזקות מתבדר ב- $x=-1$

<u>שאלה 4</u>

הפונקציה $\sqrt{|z|}$ דיפרנציאבילית אם $z\neq 0$ לכן צריך לבדוק את הגזירות ודיפרנציאבילית של $\sqrt{x^2+y^2}$ רק בנקודות

$x=-y \Leftrightarrow x^3+y^3=0$

<u>תהי $a\neq 0,(x,y)=(a,-a)$</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,-a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{|x^3-a^3|}-\sqrt{|a^3-a^3|}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{|x^3-a^3|}}{x-a}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{|x-a||x^2+xa+a^2|}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{|x-a|3a^2}}{x-a}=don't\quad exist$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,-a)=\lim_{y\to -a}\frac{\sqrt{|a^3+y^3|}-\sqrt{|a^3-a^3|}}{y-(-a)}=\lim_{y\to -a}\frac{\sqrt{|y^3+a^3|}}{y+a}=$$

$$=\lim_{y\to -a}\frac{\sqrt{|y+a||y^2-ay+a^2|}}{y+a}=\lim_{y\to -a}\frac{\sqrt{|y+a|3a^2}}{y+a}=don't\quad exist$$

לכן נגזרות החלקיות של $f(x,y)$ לא קיימות בנקודות $a\neq 0,(x,y)=(a,-a)$ וכתוצאה מזה $f(x,y)$ לא דיפרנציאבילית בנקודות האלה.

תהי $(x,y)=(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{|x^3|}}{x}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{|y^3|}}{y}=0$$

נבדוק את ה דיפרנציאבילית בנקודה $(x,y)=(0,0)$

$$f(\triangle x,\triangle y)-f(0,0)=\sqrt{|\triangle x^3+\triangle y^3|}=\frac{\sqrt{|\triangle x^3+\triangle y^3|}\,|\triangle x|^{3/2}}{\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\triangle x\right)}\triangle x+\frac{\sqrt{|\triangle x^3+\triangle y^3|}\,|\triangle y|^{3/2}}{\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\triangle y\right)}\triangle y;$$

$$\frac{\sqrt{|\triangle x^3+\triangle y^3|}\,|\triangle x|^{3/2}}{\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\triangle x\right)}\triangle x=\alpha;$$

$$\frac{\sqrt{|\triangle x^3+\triangle y^3|}\,|\triangle y|^{3/2}}{\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\triangle y\right)}\triangle y=\beta$$

מפני ש- $|\triangle x|^3+|\triangle y|^3\le\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\right)^2$

נקבל:

$$|\alpha|=\frac{\sqrt{|\triangle x^3+\triangle y^3|}\,|\triangle x|^{3/2}}{\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\right)|\triangle x|}\le\frac{\sqrt{|\triangle x|^3+|\triangle y|^3}}{\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\right)}|\triangle x|^{1/2}\le|\triangle x|^{1/2}\xrightarrow[\triangle x\to 0]{}0$$

$$|\beta|=\frac{\sqrt{|\triangle x^3+\triangle y^3|}\,|\triangle y|^{3/2}}{\left(|\triangle x|^{3/2}+|\triangle y|^{3/2}\right)|\triangle y|}\le|\triangle y|^{1/2}\xrightarrow[\triangle y\to 0]{}0$$

אז:

$f(\triangle x,\triangle y)-f(0,0)=0\bullet\triangle x+0\bullet\triangle y+\alpha\triangle x+\beta\triangle y$ עם $\alpha\to 0,\beta\to 0$ כאשר $(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)$

לכן $f(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(x,y)=(0,0)$

<u>תשובה:</u>

א. $f(x,y)$ גזירה ב- D

ב. $f(x,y)$ דיפרנציאבילית ב- D

<u>שאלה 5</u>

א.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=8x-16x^3-24xy^2=8x\left(1-\left(2x^2+3y^2\right)\right)=0\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=18y-24x^2y-36y^3=6y\left(3-2\left(2x^2+3y^2\right)\right)=0\end{cases}$$

נקודות חשודות לאקסטרמום מקומי הן: $\left(\pm\frac{1}{\sqrt2},0\right),\quad\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt2}\right),\quad(0,0)$

$$A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=8-48x^2-24y^2$$

$$C=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=18-24x^2-108y^2$$

$$B=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-48y$$

$$\Delta=AC-B^2$$

נקודת מינימום מקומי $(0,0): A>0, \quad \Delta>0\Rightarrow$

נקודות מקסימום מקומי $\left(0,\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right): A<0, \quad \Delta>0\Rightarrow$

נקודת אוכף $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right): \quad \Delta<0\Rightarrow$

ניקח את הפרמטריזציה הבאה של אליפסה $2x^2+3y^2=1$: $0\le t\le 2\pi$ $\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t \\ y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin t\end{cases}$

$$g(t)=f\left(x(t),y(t)\right)=2\cos^2 t+3\sin^2 t-1=1+\sin^2 t=1+\frac{1-\cos 2t}{2}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$$

$$\frac{dg}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\sin 2t=0$$

למשוואה זאת יש 4 פתרונות בקטע $0\le t\le 2\pi$: $t=0,\ \frac{\pi}{2},\quad \pi,\quad \frac{3\pi}{2}$

$$t=0: x=\frac{1}{\sqrt{2}}, y=0,\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=g(0)=1$$

$$t=\frac{\pi}{2}: x=0, y=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad f\left(0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$$

$$t=\pi: x=-\frac{1}{\sqrt{2}}, y=0,\quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=g(\pi)=1$$

$$t=\frac{3\pi}{2}: x=0, y=-\frac{1}{\sqrt{3}},\quad f\left(0,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2$$

יש לזכור שנקודת אקסטרמום מקומי $(0,0)$ שנמצאות בתוך התחום: $f(0,0)=0$ ולכן

$$\min f=\min\{0,1,2\}=0,\quad \max f=\max\{0,1,2\}=2$$