המכללה האקדמית אחוה

מדור בחינות

מס' הנבחן:______________

תאריך הבחינה: 15.07.2008
שם המורה: ד"ר ארקדי ליידרמן
מבחן ב: חדו"א א2
מס' הקורס: 201-1-0021
מיועד לתלמידי: מתמטיקה, מדעי המחשב
שנה: א', סמ': ב', מועד: א'
משך הבחינה: 3 שעות
חומר עזר: דף נוסחאות אחד (2 עמודים) בגודל סטנדרטי, מחשב כיס פשוט עם צג קטן

ענו על 4 השאלות מתוך 5.
כל שאלה שווה 25 נקודות.

כל התשובות חייבות להיות מלאות ומנומקות היטב

השאלות:

1. תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על הקטע $[0,1]$. הוכח ש - $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n+1}} f(x^n)\,dx = f\left(\frac{1}{e}\right)$.

2. יהי $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{x^n-1+n\ln n}$.

א) (5 נקודות) הוכח שפונקציה $S(x)$ מוגדרת לכל $x>1$.

ב) (10 נקודות) הוכח שפונקציה $S(x)$ רציפה לכל $x>1$.

ג) (10 נקודות) הראה שטור **לא** מתכנס במידה שווה בתחום $X=(1,\infty)$

3. יהי האינטגרל הלא אמתי $\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx$.

א) (10 מקודות) הוכח שעבור ערכים $0<p<2$ אינטגרל מתכנס.

ב) (15 נקודות) הוכח שהתכנסות היא בתנאי.

4. תהי $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{2x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א) (10 נקודות) הוכח שפונקציה $f(x,y)$ רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב) (15 נקודות) הוכח שפונקציה $f(x,y)$ **לא** דיפרנציאבילית בנקודה $(0,0)$

5. נתונה הפונקציה $f(x,y)=x^4-x^2+2xy+y^2$.

א) (10 נקודות) מצא את כל הנקודות של אקסטרמום מקומי של פונקציה $f(x,y)$.

ב) (15 נקודות) מצא את הערך הכי גדול ואת הערך הכי קטן של פונקציה $f(x,y)$ במשולש $\{(x,y): x+y\le 2;\ 0\le x;\ 0\le y\}$.

-בהצלחה-

<u>פתרון של מבחן מועד א' 2008</u>

<u>שאלה 1</u>

פונקציה $f(x)$ רציפה, לפי משפט על הערך הממוצע אינטגרלי קיימת נקוד ה: $c_n \in \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right]$ כך ש-

$$\int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n+1}} f(x^n)dx = \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}\right) f\left(\left(c_n\right)^n\right)$$

לכן $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n+1}} f(x^n)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n(n+1)} \lim\limits_{n\to\infty} f\left(\left(c_n\right)^n\right)$

$$\frac{n-1}{n} \le c_n \le \frac{n}{n+1}$$

לכן

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \le c_n^n \le \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$$

לכן לפי משפט "סנדוויץ'" גם $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^n = \frac{1}{e}$

על פי רציפות של $f(x)$ מקבלים ש $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\left(c_n\right)^n\right) = f\left(\frac{1}{e}\right)$ כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n+1}} f(x^n)dx = f\left(\frac{1}{e}\right)$.

<u>שאלה 2</u>

א. נקבע נקודה $x>1$ שרירותית. אזי $0 < \frac{1}{x^n - 1 + \ln n \cdot n} < \frac{1}{x^n}$ לכל n. טור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^n}$ מתכנס כי טור הנדסי עם $0 < p = \frac{1}{x} < 1$ לכן לפי מבחן השוואה גם טור בשאלה מתכנס.

ב. בהנתן $x>1$ ונקבע $1<a<x$. טור מספרי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n}$ מתכנס, לכן לפי משפט ווירשטרס ועל פי אי-שיוון $0 < \frac{1}{x^n - 1 + \ln n \cdot n} < \frac{1}{x^n}$ מסעיף א. טור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^n - 1 + \ln n \cdot n}$ מתכנס במידה שווה בתחום $[a,\infty)$. לכן לפי משפט שהוכח בקורס פונקציה $S(x)$ רציפה בתחום $[a,\infty)$ ובפרט רציפה בנקודה $x \in (a,\infty)$.

ג. אם נניח בדרך שלילה שטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{x^n - 1 + \ln n \cdot n}$ מתכנס במידה שווה בתחום $X=(1,\infty)$ אזי לפי משפט שהוכח בקורס טור יתכנס גם בקצה של תחום : בנקודה $x=1$. אבל ב- $x=1$ מקבלים טור מספרי $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n \cdot n}$ שמתבדר לפי מבחן אינטגרלי. סתירה אומרת שטור פונקציות לא מתכנס במידה שווה בתום $X=(1,\infty)$.

שאלה 3

נציג: $\int_0^\infty \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx = \int_0^\pi \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx + \int_\pi^\infty \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx$

א. באינטגרל $\int_0^\pi \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx$ מותר להשתמש במבחן השוואה כי פונקציה באינטגרל חיובית . ידוע ש- $\sin x \sim \ln(x+1),\ x\to 0$ לכן $\frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p} \sim \frac{1}{x^{p-1}},\ x\to 0$

$p<2 \Leftarrow \int_0^\pi \frac{1}{x^{p-1}}dx$ מתכנס לכן גם $\int_0^\pi \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx$ מתכנס.

אנטגרל $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx$ מתכנס לפי מבחן דיריכלה : $f(x)=\sin x$ בעעלת פונקציה קדומה חסומה

$g(x)=\frac{1}{(\ln(x+1))^p}$ יורדת לאפס באופן מונוטוני כאשר $x\to\infty$ לכל $p>0$ ובכן $\int_0^\infty \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx$ מתכנס.

ב. ידוע ש- $(\ln(x+1))^p < x$ החל מ- x_0 מסוים

לכן החל מ x_0 מסוים. מכאן $\frac{|\sin x|}{x} \ge \frac{|\sin x|}{(\ln(x+1))^p}$ החל מ x_0 מסוים. הוכח בקורס שאינטגרל $\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}dx$

מתבדר, לכן לפי מבחן השוואה גם אינטגרל $\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{(\ln(x+1))^p}dx$ בהחלט מתבדר, ז"א מתכנס רק בתנאי.

שאלה 4

א. $0 \le |f(x,y)| = \frac{|x^3+y^3|}{2x^2+y^2} \le \frac{|x|}{2}+|y|$ לכן אם $\begin{cases} x\to 0 \\ y\to 0\end{cases}$ אז גם $f(x,y)\to 0$ כלומר

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$$

ב.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^3}{2(\Delta x)^3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^3}{(\Delta y)^3} = 1$$

נרשום את התוספת שלמה

$\Delta z = \frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}{2(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} = \frac{1}{2}\cdot\Delta x + 1\cdot\Delta y + \varepsilon(\Delta x,\Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. לכן

$$\varepsilon(\Delta x,\Delta y) = \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\left(\frac{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}{2(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} - \left(\frac{1}{2}\Delta x+\Delta y\right)\right) = \frac{-\frac{1}{2}(\Delta y)^2\Delta x - 2(\Delta x)^2\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\left(2(\Delta x)^2+(\Delta y)^2\right)}$$

התנאי של דיפרנציאביליות $\varepsilon(\Delta x,\Delta y)\to 0$ כאשר $\Delta x,\Delta y\to 0$ **<u>לא</u>** מתקיים פה

כי באלכסון $\Delta x=\Delta y=t>0$ מקבלים ש- $\varepsilon(t,t) = \frac{-\frac{5}{2}t^3}{3\sqrt{2}\,t^3} = -\frac{5}{6\sqrt{2}} \ne 0$

לכן פונקציה $f\left(x,y\right)$ **<u>לא</u>** דיפרנציאבילית בנקודה $\left(0,0\right)$.

<u>שאלה 5</u>

א.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=4x^3-2x+2y=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2x+2y=0\end{cases};\Rightarrow -x=y\Rightarrow 4x^3-4x=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\\ x_2=1\\ x_3=-1\end{cases}$$

ובכן יש 3 נקודות חשודות $M_1(0,0);M_2\left(1,-1\right);M_3\left(-1,1\right)$

$$f''_{xx}(x,y)=12x^2-2;\ f''_{yy}(x,y)=2;\ f''_{xy}(x,y)=2$$

בנקודה M_1 מקבלים מטריצה $\begin{pmatrix}-2&2\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\Delta<0\Rightarrow$ נק' אוכף

בנקודות $M_2\left(1,-1\right);M_3\left(-1,1\right)$ מקבלים מטריצה $\begin{pmatrix}10&2\\2&2\end{pmatrix}\Rightarrow\Delta>0,A>0\Rightarrow$ נק' מינימום מקומי.

ב. נקודות $M_2\left(1,-1\right);M_3\left(-1,1\right)$ לא נמצאות בתחום. נחקור על השפה של משולש

1. $y=0,\ x\in[0,2]$

$$g_1(x)=x^4-x^2;\ x\in[0,2]$$

$$g'_1(x)=4x^3-2x=0\Rightarrow x=0;\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_1(0)=0;\ g_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{4};\ g_1\left(2\right)=12$$

2. $x=0,\ y\in[0,2]$

$$g_2(y)=y^2;\ y\in[0,2]$$

$$g_2(0)=0;\ g_2\left(2\right)=4$$

3. $y=2-x,\ x\in[0,2]$

$$g_3(x)=x^4-x^2+2x(2-x)+(2-x)^2=x^4-2x^2+4=(x^2-1)^2+3;\ x\in[0,2]$$

$$g'_3(x)=2x(x^2-1)=0\Rightarrow x=0;\ x=\pm1$$

$$g_3(0)=4;\ g_3\left(1\right)=3;\ g_3\left(2\right)=12$$

תשובה: ערך הכי קטן $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=-\frac{1}{4}$

ערך הכי גדול $f(2,0)=12$