חדו"א א'2 (20110021) - מבחן מסכם, מועד א' פתרונות מקוצרים
סמסטר ב' תשס"ח
המרצים: פרופ' אמנון בסר, פרופ' ולדימיר גולדשטיין, ד"ר אילן הירשברג, ד"ר ארקדי ליידרמן

1. (א) (15 נק') עבור $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ נסמן $A_f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq f(x)\right\}$. הראו כי אם f רציפה אז A_f סגורה ב-$\mathbb{R}^2$.

פתרון: קבוצה היא סגורה אם ורק אם לכל סדרת איברים מתוכה שמתכנסת מתקיים שגם הגבול נמצא בקבוצה. אם כן, נניח כי $v_n\in A_f$, $v_n\to v$. צריך להראות כי $v\in A_f$. נסמן $v_n=(x_n,y_n)$, $v=(x_0,y_0)$, אזי $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$. מכיוון ש-$v_n\in A_f$ הרי ש-$y_n\geq f(x_n)$ לכל n. צריך להראות כי $y_0\geq f(x_0)$. מכיוון ש-f רציפה, מתקיים כי $f(x_n)\to f(x_0)$. מכיוון ש-y_n סדרה מתכנסת ו-$y_n\geq f(x_n)$ לכל n, הרי ש-$y_0=\lim\limits_{n\to\infty}y_n\geq\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0)$, כנדרש.

(ב) (10 נק') נגדיר $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \mid \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \mid \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$. האם f רציפה בנקודה $(0,0)$?

פתרון: לא. נגדיר $v_n=(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n})$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$, ואילו

$$\lim_{n\to\infty}f(v_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1/n^4}{1/n^4+1/n^4}=\frac{1}{2}\neq 0=f(0)$$

2. (א) (15 נק') נתונים טור חזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ עם רדיוס התכנסות $r_1>0$ וטור חזקות נוסף $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ עם רדיוס התכנסות r_2, כאשר $r_2>r_1$. הראו כי רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ הוא r_1.

פתרון: נראה כי אם $|x|>r_1$ אז הטור מתבדר, ואם $|x|<r_1$ אז הטור מתכנס. אכן, אם $|x|>r_1$ אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתבדר ואילו הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ מתכנס. אם כן, הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ הינו סכום של טור מתבדר עם טור מתכנס, ולכן מתבדר. אם $|x|<r_1$ אזי שני הטורים מתכנסים, ולכן $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ הוא סכום של שני טורים מתכנסים, ולכן מתכנס.

(ב) (10 נק') הוכיחו או הפריכו בעזרת דוגמא נגדית: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה אינסוף פעמים, אזי $f(1)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

פתרון: הטענה איננה נכונה. למשל, נבחר $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, אז $f^n(0)/n!=(-1)^{n/2}$ אם n זוגי ו-0 אחרת, ולכן הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ מתבדר (ובפרט לא שואף ל-$f(1)$).
דוגמא אחרת היא הפונקציה המוגדרת להיות 0 כאשר $x\leq 0$ ו-$e^{-1/x}$ בשאר הנקודות - כאן יש לבדוק כי היא אכן גזירה אינסוף פעמים, כל נגזרותיה בנקודה 0 הם 0, אבל $f(1)=1/e\neq 0$.

3. (א) (15 נק') תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. נניח שידוע כי $f(x,y)=0$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש-$y=3x-2$. נניח כי $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$. מצאו את $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

פתרון: נגדיר $\gamma(t)=(\gamma_1(t),\gamma_2(t))=(t,3t-2)$, $g(t)=f\circ\gamma(t)=f(t,3t-2)$. מהנתון, $g(t)=0$ לכל t, ולכן בפרט $g'(1)=0$. מכלל השרשרת,

$$g'(1)=\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot\gamma_1(1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot\gamma_2(1)=1\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot 3$$

אם כן, $0=1+3\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ ולכן $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-1/3$.
הערה: ניתן לקצר במעט את התשובה ולציין כי וקטור הגרדיינט צריך להיות ניצב לקו הגובה.

(ב) (10 נק') נגדיר $f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה f דיפרנציאבילית.

פתרון: נגדיר $g(t)=\sqrt[3]{t}$, $h(x,y)=xy$, אז $f=g\circ h$. g גזירה בכל נקודה פרט ל-0, $t=0$, ולכן f דיפרנציאבילית בכל (x,y) כך ש-$xy\neq 0$, כלומר כאשר $x\neq 0$ או $y\neq 0$. בנקודות בהן $x=0$ ו-$y\neq 0$, נבדוק ש-$\partial f/\partial x$ איננה קיימת, ולכן הפונקציה איננה דיפרנציאבילית: הנגזרת החלקית בנקודה

מהצורה $(0,a)$, $a\neq 0$, היא הגבול

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(t,a)-f(t,a)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{at}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{a}}{t^{2/3}}$$

והגבול הזה אינו קיים. באופן דומה, רואים שהפונקציה איננה דיפרנציאבילית כאשר $x\neq 0$ ו-$y=0$ - בנקודות כאלה הנגזרת החלקית $\partial f/\partial x$ אינה קיימת. באשר לראשית, הנגזרות החלקיות אמנם קיימות, אך הנגזרת הכוונית בכוון של הוקטור $(1,1)$ איננה קיימת: הנוסחא לנגזרת הכוונית היא $D_{(1,1)}f(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t,t)-f(0,0)}{t}=\lim\limits_{t\to 0}\sqrt[3]{t^2}/t$, וגבול זה אינו קיים.

4. עבור $a\in\mathbb{R}$, נסמן ב-L_a את אורך הגרף של הפונקציה $f(x)=\sin(x)$ בקטע $[a,a+1]$. מצאו a כך ש-L_a מקסימאלי ו-a עבורו L_a מינימאלי, אם קיימים כאלה. אין צורך לחשב את האורכים L_a המתאימים.

פתרון: לפי נוסחת אורך הגרף $L_a=\displaystyle\int_a^{a+1}\sqrt{1+\cos^2 x}$. אם נסמן $F(t)=\int_0^t\sqrt{1+\cos^2 x}$, אז מהמשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי, מכיוון שהאינטגרנד הוא פונקציה רציפה, הרי ש-F גזירה ומתקיים כי $F'(t)=\sqrt{1+\cos^2 t}$. אם כן, $L_a=F(a+1)-F(a)$, ולכן

$$\frac{dL_a}{da}=F'(a+1)\cdot\frac{d(a+1)}{da}-F'(a)=F'(a+1)-F'(a)=\sqrt{1+\cos^2(a+1)}-\sqrt{1+\cos^2 a}$$

נבדוק מתי $\frac{dL_a}{da}=0$. אם כן, מתקיים שוויון כאשר $\sqrt{1+\cos^2(a+1)}=\sqrt{1+\cos^2 a}$, כלומר כאשר $\cos(a+1)=\pm\cos(a)$, כלומר $a+1=a+n\pi$ או $a+1=-a+n\pi$ $(n\in\mathbb{N})$, כלומר כאשר $a=\frac{\pi n}{2}-\frac{1}{2}$. דרך אחת לראות זאת היא בעזרת שימוש בזהויות הטריגונומטריות

$$\cos(\alpha)+\cos(\beta)=2\cos((\alpha+\beta)/2)\cos((\alpha-\beta)/2),\cos(\alpha)-\cos(\beta)=-2\sin((\alpha+\beta)/2)\sin((\alpha-\beta)/2)$$

דרך אחרת לראות זאת היא על ידי התבוננות במשמעות הגיאומטרית של קוסינוס: הקוסינוס של מספר $\theta\in[0,2\pi)$ הוא ההיטל של הנקודה על מעגל היחידה בזווית θ מציר ה-x על ציר ה-x, וניתן לראות שבאופן כללי, פרט לזוויות $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2$, יש לכל זווית נתונה θ בדיוק 4 זוויות $\theta'\in[0,2\pi)$ כך ש-$\cos(\theta)=\pm\cos(\theta')$, שמתקבלות על ידי שיקוף הנקודה המקורית על המעגל סביב צירי ה-x וה-y, וכך נקבל ש-θ' היא מהצורה $\theta+\pi n$ או $-\theta+\pi n$.

נשים לב שהביטוי L_a מחזורי ב-a עם מחזור π, ומכיוון שהוא פונקציה רציפה של a, ולכן המינימום והמקסימום יתקבלו בכל מחזור, כלומר בנקודות $a=-\frac{1}{2}$ ו- $a=\frac{\pi-1}{2}$. עתה, הנגזרת dL_a/da רציפה ב-$[-\pi,\pi]$ ומתאפסת בנקודות $-\frac{1}{2}$ ו- $\frac{\pi-1}{2}$ ולכן בעלת סימן קבוע ב-$[-\pi,-\frac{1}{2}),(-\frac{1}{2},\frac{\pi-1}{2}),(\frac{\pi-1}{2},\pi]$. על-ידי הצבה נקבל שהנגזרת שלילית ב $(-\frac{1}{2},\frac{\pi-1}{2})$ וחיובית בשני הקטעים האחרים ומכאן שהמקסימום מתקבל כש-$a=-\frac{1}{2}$ והמינימום מתקבל כאשר $a=\frac{\pi-1}{2}$.

5. נניח כי $f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ סדרת פונקציות המתכנסת במידה שווה לפונקציה f. נניח כי כל הפונקציות f_n מקיימות תנאי ליפשיץ, כלומר, לכל n קיים $K_n>0$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים כי $|f_n(x)-f_n(y)|\leq K_n|x-y|$. הראו כי f רציפה במידה שווה.

פתרון: בהנתן $\varepsilon>0$ צריך למצוא $\delta>0$ כך שלכל x,y, אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$. $f_n\to f$ במידה שווה, ולכן קיים N כך שלכל $n\geq N$ מתקיים כי $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon/3$ לכל t. בפרט $|f_N(t)-f(t)|<\varepsilon/3$ לכל t. נגדיר $\delta=\varepsilon/3K_N$, ואז, לכל $x,y\in\mathbb{R}$ מתקיים כי אם $|x-y|<\delta$ אז

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-f_N(x)|+|f_N(x)-f_N(y)|+|f_N(y)-f(y)|<$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+|x-y|\cdot K_N+\frac{\varepsilon}{3}<\frac{\varepsilon}{3}+\delta\cdot K_N+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

כנדרש.