

תדו"א 2

עבודת בית 1. אינטגרל מוסיים.

שאלה 1.

תהי פונקציה מוגדרת באופן הבא: $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 0, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$
האם הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

שאלה 2.

תארו את כל הפונקציות $f(x)$ כך שלכל שתי חלוקות של קטע T_1 ו- T_2 של קטע $[a,b]$ סכומי דרבו שווים זה לזה: $\underline{S}(T_2) = \overline{S}(T_1)$.

שאלה 3.

$[x]$ מסמן החלק השלם של מספר ממשי x . תהי פונקציה מוגדרת בקטע $[0,1]$ באופן הבא:

תבדקו האם פונקציה מונוטונית. תבדקו כמה נקודות אי-רציפות $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

יש לפונקציה. האם הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[0,1]$?

שאלה 4.

חשבו את הגבול של הסכום הבא באמצעות אינטרגרל מסוים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + 1^2} + \frac{1}{n^2 + 2^2} + \dots + \frac{1}{n^2 + n^2} \right)$$

שאלה 5.

מצאו נגזרת $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

שאלה 6.

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה על $[0,1]$. הוכיחו ש- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$.

שאלה 7.

תהי $f(x)$ פונקציה אינטרגבילית ומחזורית עם מחזור $T > 0$. הוכיחו שלכל a מתקיים השוויון

$$\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$$

שאלה 8.

תהי פונקציה רציפה לכל $x \in \mathbb{R}$.

יהי $T > 0$ מספר ממשי כך ש- $\int_x^{x+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הראו כי $f(x)$ פונקציה מחזורית עם מחזור T , ז"א $f(x+T) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

שאלה 9. לחשב $\int_{-2}^0 (x^2 - 4)\cos 3x dx$.

שאלה 10. לחשב (א) $\int_0^{1/2} \frac{8x - \arctg 2x}{1+4x^2} dx$ (ב) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{(x - \sin x)^2} dx$.